Estructuras de Datos y Algoritmos

Año 2022

Repaso de Relaciones

Ejercicio 1:

Sean $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$ y $X = \{a\}$, y sean R y $S \subseteq A \times B$, tal que $R = \{(a, 2), (b, 1)\}$ y $S = \{(a, 1), (a, 2)\}$ se pide:

a) Determinar por extensión $R \cup S$, $R \cap S$, $R - S$, $\overline{R \cap S}$, $\overline{R \cup S}$, $R_{|X}$ y $S_{|X}$.

Ejercicio 2:

Sea $A = \{-1, 0, 1\}$ y considerando las siguientes relaciones definidas sobre A

$$R_1 \subseteq A \times A, R_1 = \{(x, y)/(x, y) \in A \times A \wedge\ x = y\}$$
$$R_2 \subseteq A \times A, R_2 = \{(x, y)/(x, y) \in A \times A \wedge\ x + y = 2\}$$
$$R_3 \subseteq A \times A, R_3 = \{(x, y)/(x, y) \in A \times A \wedge\ y = x^2 + 1\}$$
$$R_4 \subseteq A \times A, R_4 = \{(x, y)/(x, y) \in A \times A \wedge\ x^2 + y^2 = 1\}$$

a) Determinar por extensión $R_i, i = 1 \ldots 4$

b) Determinar por extensión R_3^{-1}, $\overline{R_4}$, $\overline{R_2 \cup R_3}$.

Ejercicio 3:

Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$ y sean Q, R y $S \subseteq X \times X$, tal que:

$Q = \{(a, e), (d, a), (d, e)\}$ $\quad$ $R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d)\}$ $\quad$ $S = \{(a, b), (a, d), (c, e), (e, d)\}$

Obtener $R \cup Q$, $R \cap S$, $Q \circ S$, $R \triangle S$ y $Q \cap S$. ¿Está $S \subseteq R^{-1} \cup Q$?

Ejercicio 4:

Dados $A = \{a, b\}$ y $B = \{1, 2\}$, definir por extensión $\mathcal{P}(A \times B)$, luego tomar **cada uno** de los elementos del conjunto $\mathcal{P}$ como una relación R_i definida de A en B y analizar qué propiedades cumple la misma.

Ejercicio 5:

Sea el conjunto A y las relaciones definidas sobre él Id y R tal que $R \subseteq A \times A$ y $Id = \{(x, y)/(x, y) \in A \times A \wedge\ x = y\}$, se pide demostrar que $R \circ Id = R$.

Ejercicio 6:

Sean S y R relaciones definidas sobre $A \times B$ (R y $S \subseteq A \times B$). Demostrar que:

1. $R \subseteq S \Leftrightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$
2. $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
3. $R \subseteq S \Leftrightarrow \overline{S} \subseteq \overline{R}$

Ejercicio 7:

Dado $X = \{a, b\}$ tomar cada elemento de $\mathcal{P}(X \times X)$ como una relación $R_i \subseteq X \times X$ y analizar para cada una de ellas qué propiedades cumple.

Ejercicio 8:

Dado $A = \{a, b, c, d, e\}$, mostrar cuatro ejemplos de relaciones, por comprensión o por extensión, $R_i \subseteq A \times A$ tales que: dos sean órdenes totales y dos sean órdenes parciales. Justifique su respuesta demostrando que cada una cumple las propiedades en cada caso.

Ejercicio 9:

Dar un ejemplo de una relación que sea un Pre-orden, pero no relación de Orden, ni Orden Total y tampoco de Equivalencia.

Ejercicio 10:

Demostrar que la relación "$\subseteq$" entre conjuntos es un orden parcial.

Ejercicio 11:

Dado el conjunto X y el conjunto $S \subseteq X$, y sea E_S una relación definida sobre $\mathcal{P}(X)$ tal que

$$E_S = \{(A, B) : A \in \mathcal{P}(X), B \in \mathcal{P}(X) \text{ y } A \vartriangle B \subseteq S\}$$

Demuestre que E_S es una relación de equivalencia.

Ejercicio 12:

Dadas las siguientes relaciones analizar por qué no son relaciones de equivalencia expresando claramente su justificación:

1. $\{(x, y)/$ "x es padre de y"$\}$
2. $\{(x, y)/$ "x vive cerca de y"$\}$
3. $\{(x, y)/$ "x e y son rectas con un punto o más en común"$\}$

Ejercicio 13:

Sea R una relación sobre X, tal que: a) $Dom(R) = X$ y b) R es simétrica y transitiva.

Muestre que R es una relación de equivalencia

Ejercicio 14:

Sea $f : X \to Y$ una función sobreyectiva, con X un conjunto no vacío. Si se define la relación E_f sobre X tal que:

$$a\ E_f\ b \text{ si sólo si } f(a) = f(b)$$

Muestre que E_f es una relación de equivalencia.

Ejercicio 15:

Sea R una relación sobre $\mathbb{R}$ tal que:

$$r\ R\ s \text{ si sólo si } r - s \in \mathbb{Z}$$

Demostrar que es una relación de equivalencia.

Ejercicio 16:

Dadas las siguientes definiciones:

- $R \subseteq X \times X$
- $R^2 = R \circ R$
- $\mathcal{X} = X \times X$

Demostrar que:

1. R es transitiva y reflexiva $\Rightarrow R^2 = R$.
2. R es un orden parcial $\Rightarrow R^{-1}$ es un orden parcial.
3. R es un orden parcial $\Rightarrow R^2$ es un orden parcial.
4. $R^2 \subseteq R \Rightarrow R$ es transitiva.

Ejercicio 17:

¿Es la unión de funciones una función? ¿Es la intersección de funciones una función? Si su respuesta es afirmativa demuéstrelo, caso contrario dé un contraejemplo.

Ejercicio 18:

Dada la función f definida de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$,

$$f(x) = \begin{cases} 10 & \text{si } x = 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

.

¿Es inyectiva? ¿Es sobreyectiva? Justifique.

Ejercicio 19

Demostrar el siguiente teorema:

Sea f una función total de A en B, $f : A \longmapsto B$:

a) $\mid Ran(f) \mid \leq \mid A \mid$

b) Si f es inyectiva entonces $\mid A \mid \leq \mid B \mid$

c) Si f es sobreyectiva entonces $\mid B \mid \leq \mid A \mid$

d) Si f es biyectiva entonces $\mid A \mid = \mid B \mid$

e) Si $\mid A \mid = \mid B \mid$ entonces f es sobreyectiva si y sólo si f es inyectiva.

Ejercicios Adicionales

Ejercicio 1:

Dados los siguientes conjuntos:

$D = \{x/$ "x es un departamento en una empresa"$\}$ $P = \{x/$ "x es un empleado de una empresa"$\}$

y las siguientes relaciones:

$R_1 \subseteq P \times D$,	$R_1 = \{(x, y)/$ "x es el jefe del departamento y"$\}$
$R_2 \subseteq P \times P$,	$R_2 = \{(x, y)/$ "x manda a y"$\}$
$R_3 \subseteq D \times P$,	$R_3 = \{(x, y)/$ "en el departamento x trabaja el empleado y"$\}$

Se pide para cada una de las relaciones planteadas analizar qué propiedades cumple y además decir cómo podría obtenerse R_3 a partir de R_1 y R_2. Agregar todos los supuestos que considere necesarios para analizar las relaciones planteadas.

Ejercicio 2:

Sea S y R relaciones definidas sobre $\mathbb{R}$ donde S es la relación "$<$" y R es la relación "$>$". Describa las siguientes relaciones:

1. $R \cap S$
2. $R \cup S$
3. S^{-1}
4. $\overline{R \cup S}$

Ejercicio 3:

Determinar si cada una de las siguientes relaciones es función, total, sobreyectiva, inyectiva, reflexiva, simétrica, transitiva, antirreflexiva, antisimétrica o débilmente antisimétrica. Clasificar, si es posible, cada una de las relaciones por las propiedades que cumple.

1. $\{(x, y)/$ "x es hermano de y"$\}$ (sobre el conjunto de los hombres)
2. $\{(x, y)/$ "x tiene la misma fecha de cumpleaños que y"$\}$ (sobre el conjunto de las personas)
3. $\{(x, y)/$ "x es múltiplo de y"$\}$ (sobre $\mathbb{Z}^+$)

Ejercicio 4:

¿Cuál es el error en la siguiente "demostración"que dice que la propiedad reflexiva se obtiene desde las propiedades simétrica y transitiva?

Asumiendo que R es simétrica y transitiva. Entonces $(x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R$ por simetría. Dado que $(x, y) \in R$ y que $(y, x) \in R$, entonces por transitividad tenemos que $(x, x) \in R$. Por lo tanto, R es reflexiva.

Ejercicio 5:

Dada una relación R ternaria sobre X ($R \subseteq X \times X \times X$) haga una propuesta de extensión de la propiedad de ser Reflexiva y de ser Simétrica.

Ejercicio 6:

Sea la relación de E_S definida en el **Ejercicio 11** del práctico se pide analizar:

a)Para $S, T \subseteq X$ ¿cómo se comparan los conjuntos $E_S \cap E_T$ y $E_{S\cap T}$?

b)Para $S, T \subseteq X$ ¿cómo se comparan los conjuntos $E_S \cup E_T$ y $E_{S\cup T}$?

c)Para $S, T \subseteq X$ ¿cómo se comparan los conjuntos $E_S \Delta E_T$ y $E_{S\Delta T}$?

Ejercicio 7:

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y sean :

$A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$	$A_2 = \{5, 6, 7\}$	$A_3 = \{4, 5, 7, 9\}$
$A_4 = \{4, 8, 10\}$	$A_5 = \{8, 9, 10\}$	$A_6 = \{1, 2, 3, 6, 8, 10\}$

¿Cuáles de los siguientes conjuntos son particiones de A?

a) $\{A_1, A_2, A_5\}$ b) $\{A_1, A_3, A_5\}$
c) $\{A_3, A_6\}$ d) $\{A_2, A_3, A_4\}$

Ejercicio 8

Sea el conjunto $A = \{1, 2, 5, 6, 7, 9, 11\}$ y digamos que $x \sim y$ si y sólo si $x - y$ es divisible por 5. Comprobar que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre A y describir la partición de A en clases de equivalencia.

Ejercicio 9:

a) Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y una partición P sobre él, donde $P = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}\}$ Determinar la correspondiente relación de equivalencia R inducida por P.

b) Dada la siguiente relación de equivalencia definida sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 5), (5, 4), (4, 4), (5, 5)\}$$

Determinar la correspondiente partición sobre A inducida por R.

Ejercicio 10:

Utilizando las definiciones del **ejercicio 16** y agregando $\Delta = \{(x, x)/x \in X\}$, demostrar que:

1. R es antisimétrica $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} = \emptyset$
2. R es débilmente antisimétrica $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq \Delta$
3. R es antisimétrica $\Rightarrow R$ es antirreflexiva.
4. R es un orden parcial $\Rightarrow R \cap R^{-1} = \Delta$
5. R es antirreflexiva $\Rightarrow R$ es no reflexiva.
6. R es reflexiva $\Rightarrow R$ no es antirreflexiva.
7. R es reflexiva $\Leftrightarrow \Delta \subseteq R$
8. R es antirreflexiva $\Leftrightarrow \Delta \cap R = \emptyset$
9. R es simétrica $\Leftrightarrow R = R^{-1}$

Ejercicio 11:

a) Dada una partición $\mathcal{P} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ de X demostrar que la relación inducida:

$$R = \{(x,y)/x, y \in X \wedge \text{"están en la misma clase o parte } (X_i)\text{"}\}$$

es una relación de equivalencia.

b) Dada una relación de equivalencia R definida sobre X demostrar que el conjunto

$$P = \{R_{[x]}/R_{[x]} \text{ es una clase de equivalencia de } R\}$$

es una partición sobre X.

Ejercicio 12:

Dada la definición generalizada de producto cartesiano:

$$\mathop{\mathrm{X}}_{\alpha \in \mathcal{I}} C_\alpha = \{f/f : \mathcal{F} \longmapsto \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} C_\alpha \wedge (\forall \beta \in \mathcal{I})(f(\beta) \in C_\beta)\}$$

a) En el producto cartesiano normal podíamos hablar de primero y segundo elemento. De acuerdo a esta definición generalizada, ¿se conserva este vocabulario o debe usar uno alternativo?

b) Si se realiza el producto cartesiano generalizado entre los conjuntos $\{\mathbb{I}_i\}, C_i = \mathbb{I}_i \,; \mathcal{I} = \mathbb{N}$.

$$\mathop{\mathrm{X}}_{i \in \mathcal{I}} C_i$$

Indique si la siguiente sucesión pertenece a dicho producto cartesiano, asumiendo que se han omitido los índices de los conjuntos y que la secuencia se encuentra ordenada por el orden de los índices: $(1, 3, 3, 4, 2, 6, \ldots\ldots)$

Ejercicio 13:

Dada la definición generalizada de producto cartesiano:

$$\mathop{\mathrm{X}}_{\alpha \in \mathcal{I}} C_\alpha = \{f/f : \mathcal{F} \longmapsto \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} C_\alpha \wedge (\forall \beta \in \mathcal{I})(f(\beta) \in C_\beta)\}$$

Analice y dé un ejemplo para un producto cartesiano de sólo dos elementos ($C_1 \times C_2$).

Ejercicio 14:

a) Proponga una función que sustituya la siguiente tabla:

x	$f(x)$
1	1
2	8
3	9
4	64
5	25
6	216
7	49

b) Sustituya la función $f(x) = 2x + 1$ para $x \in \mathbb{I}_{10}$ por una tabla.

c) ¿En qué caso no se puede sustituir una función por una tabla?