Estructuras de Datos y Algoritmos

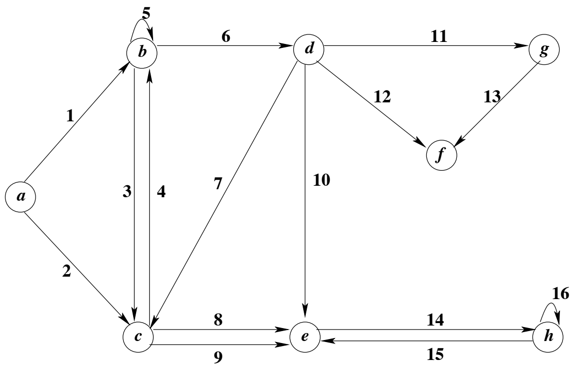
Año 2022

Práctico 6: Grafos

Licenciatura en Ciencias de la Computación - Profesorado en Ciencias de la Computación

Ejercicio 1:

Dado el siguiente p-digrafo G:



a) Dar la definición formal de G especificando claramente X, U y γ.

b) Dar $\gamma(14), \gamma(15), \gamma^-(8), \gamma(10), \gamma^-(4), \gamma^-(9), \gamma^+(8), \gamma^+(6), \gamma^-(7), \gamma^+(1)$.

c) Siendo G un p-digrafo, ¿cúal es el valor de p?. Dar $orden(G)$. ¿G es regular?

d) Especificar $\omega^+(e), \omega^-(e), \omega^+(f), \omega(h)$.

e) Especificar $g^-(a), g^+(b), g^-(b), g(b), g^+(f), g(f)$.

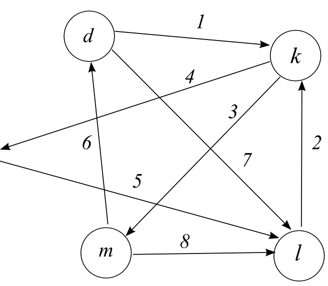
f) Dar, si existen, vértices aislados, fuentes y sumideros.

g) Calcular $\Gamma^-(a), \Gamma^+(c), \Gamma^-(b), \Gamma^-(c), \Gamma(c), \Gamma(h)$.

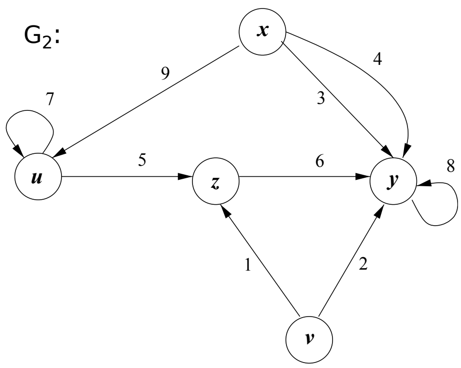
Ejercicio 2:

Describir formalmente cada uno de los siguientes digrafos y luego resolver, justificando cada respuesta:

G_1:



G_2:



a) Enumerar, si los hay, todos los caminos simples y elementales desde m a t y mencionar por lo menos uno que no sea elemental.

b) Encontrar el camino más corto de x a z y dar uno que sea dos veces más largo que el anterior.

c) Dar ejemplos de: cadena no simple, cadena elemental, cadena simple pero no elemental, ciclo, pseudo-ciclo, camino no simple, camino elemental, camino simple pero no elemental y circuito para cada digrafo.

d) Graficar y dar la especificación formal del grafo subyacente de ambos digrafos. Dar ejemplos de subdigrafos, digrafos parciales y subdigrafos parciales de los digrafos dados.

e) Decir en cada caso si las siguientes secuencias son cadenas y/o caminos y de qué tipo son:

En G_1 :

1. $(1, 4, 8, 5)$
2. $(6, 1, 3)$
3. $(6, 7, 2, 3, 8)$
4. (5)

En G_2 :

1. $(1, 6, 4, 9, 7)$
2. $(9, 5, 6, 2, 1, 6)$
3. $(1, 6, 8)$
4. $(3, 6, 5, 7, 9)$

Ejercicio 3:

Suponiendo que existen caminos simples del vértice a al vértice b, y del vértice b al vértice a ¿Puede o no afirmar que existe un camino cerrado simple que contiene ambos vértices?

Ejercicio 4:

¿Cuál es el número máximo de aristas que puede tener un 1-digrafo con v vértices? ¿Cuál es el menor número de aristas de un 1-digrafo de v vértices si ninguno es aislado?

Ejercicio 5:

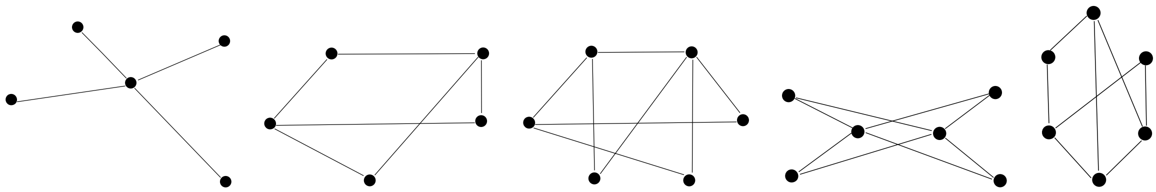
En un mapa de rutas de una región aparecen 25 tramos de ruta. Sabiendo que los cruces de ruta se producen siempre en una población y que de cada lugar parten al menos cuatro caminos, ¿cuántas poblaciones aparecen en el mapa?

Ejercicio 6:

Se quiere diseñar una red eléctrica que tenga seis subestaciones de distribución unidas por la menor cantidad de líneas de transmisión posibles. Deben estar conectadas de modo tal de asegurar que si se corta alguna de la líneas no se caiga la red, es decir que cada subestación siga recibiendo electricidad. Además, existe una única subestación que está conectada de tal manera que, si se descompone, desconecta la red.

Ejercicio 7:

Determinar si entre los siguientes grafos hay grafos bipartitos, justifique cada una de sus respuesta:



Ejercicio 8:

Dibujar, de ser posible, digrafos con las características que se indican en cada caso; si no se puede justificar claramente por qué.

a) Un digrafo de seis vértices que tenga un nodo de grado cuatro, un nodo de grado tres, un nodo de grado dos y tres de grado 1.

b) Un digrafo, de no menos de 3 vértices, que tenga exactamente 1 circuito, 2 bloques, un cocircuito y un sumidero.

c) Un digrafo, de al menos 3 vértices, que tenga exactamente un cociclo elemental.

d) Un digrafo que tenga un circuito, un cocircuito y sea de orden 4.

e) Un digrafo con orden mayor a dos, en el que todos los cociclos elementales son de cardinalidad 2.

f) Un digrafo bipartito completo de 5 vértices que tenga la menor cantidad de arcos posible. ¿Puede ser regular? Justifique su respuesta.

Ejercicio 9:

Sean $X = \{t, u, v, w, x, y, z\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

$$\gamma = \{(1, (t, u)), (2, (t, v)), (3, (u, u)), (4, (u, w)), (5, (v, w)), (6, (v, y)),$$
$$(7, (x, v)), (8, (y, x)), (9, (y, z)), (10, (w, w)), (11, (z, v))\}$$

a) Representar gráficamente el digrafo $G = \langle X, U, \gamma \rangle$, el subdigrafo G_1 de G con $X_1 = \{t, u, w, x, y\}$ y el subdigrafo G_2 de G con $X_2 = \{v, x, y, z\}$.

b) Analizar si son conectados y/o fuertemente conectados, y en cada caso mostrar las componentes conectadas y las fuertemente conectadas.

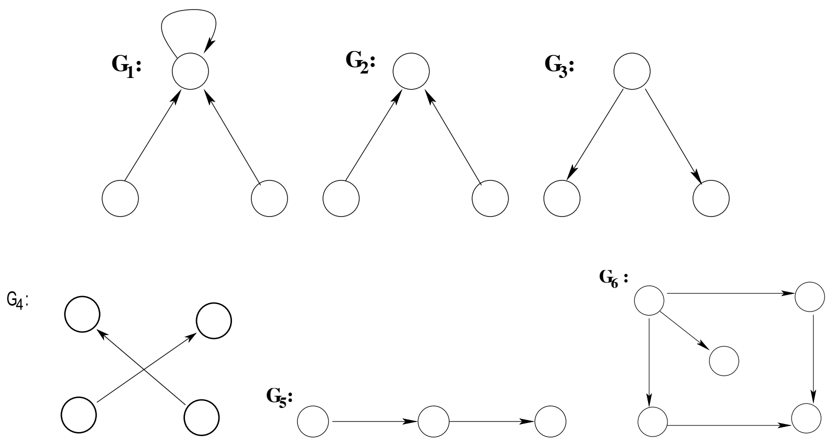
c) Para cada uno de estos subdigrafos dar los conjuntos de fuentes y sumideros, raíces y raíces del grafo inverso.

d) Dar un subgrafo parcial de G, que sea grafo parcial de G_1.

e) Dar, en caso de ser posible, una cadena que no sea camino, y un camino que no sea cadena. Justificando en cada caso su respuesta.

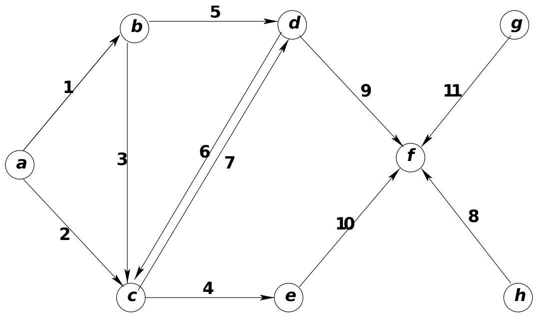
Ejercicio 10:

Para cada uno de los siguientes digrafos analizar si son árboles y/o arborescencias justificando sus respuestas.



Ejercicio 11:

Dado el siguiente digrafo, se pide mostrar al menos dos árboles subtensos (o árboles cubrientes) distintos y sus respectivos co-árboles.



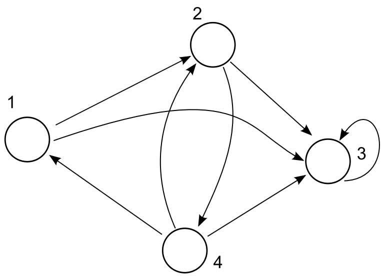
Ejercicio 12:

Considerando el digrafo del ejercicio anterior verificar si cada uno de los siguientes subconjuntos de U son cociclos y/o cocircuitos; analizar si son elementales. En caso de que sean cociclos dar el conjunto de vértices en el cual se basan.

1. $\{1, 2\}$
2. $\{1, 2, 9, 10\}$
3. $\{4, 5\}$
4. $\{1, 2, 5, 6, 7\}$
5. $\{8, 11\}$
6. $\{8, 9, 10, 11\}$
7. $\{5, 6, 7\}$
8. $\{9, 10\}$
9. $\{4, 10, 11\}$

Ejercicio 13:

Dado el 1-digrafo:



Dar su representación utilizando:

a) *Matriz de adyacencia* (matriz booleana A de dimensión $n \times n$, donde $A[i, j]$ es verdadero (1) si y sólo si existe un arco desde el vértice i al vértice j; con $\mid X \mid= n$).

b) *Lista de adyacencia* (arreglo de cabecera C de tamaño n donde $C[i]$ es un apuntador a la lista de adyacencia del vértice i representada como una LV; es decir, que si existe un arco desde el vértice i al vértice j, en la lista apuntada por $C[i]$ aparecerá una celda conteniendo a j; con $\mid X \mid= n$).

c) Si el grafo de la figura tuviera arcos paralelos ¿qué representación utilizaría? Justifique.

Ejercicio 14:

Sabiendo que un digrafo G consta de los vértices a, b, c, d, e y su matriz de adyacencia (donde se han codificado los vértices en orden lexicográfico) es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dibujar el digrafo correspondiente.

b) Representar el digrafo mediante listas de adyacencia

Ejercicio 15:

Se tiene un 1-digrafo de n vértices representado mediante su lista de adyacencia, diseñar en pseudocódigo rutinas que:

a) dados dos vértices i y j devuelva verdadero si hay una arista entre ellos, y falso en otro caso.

b) devuelva el grado de salida de cada vértice del grafo.

c) que dado un vértice i devuelva el grado del mismo y sus sucesores.

Ejercicio 16:

Modificar los algoritmos del ejercicio anterior para que utilice un grafo representado por su matriz de adyacencia.

Analice los algoritmos diseñados utilizando las diferentes representaciones de un grafo y explique la conveniencia de usar una o la otra.

Ejercicios Adicionales

Ejercicio 1:

Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$

a) $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $\gamma = \{(1, (a, b)), (2, (a, c)), (3, (a, d)), (4, (d, d)), (5, (a, b))\}$

b) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y
$\gamma = \{(1, (a, b)), (2, (a, d)), (3, (c, e)), (4, (e, d)), (5, (a, d)), (6, (c, e)), (7, (a, d))\}$

Se pide representar gráficamente cada uno de los p-digrafos y en cada caso decir cuánto vale p, el conjunto de vértices aislados, y analizar las propiedades que cumple la función de incidencia.

Ejercicio 2:

Construir un grafo de orden 5 cuyos vértices tengan grados $1, 2, 2, 3, 4$. ¿Cuál es la cantidad de aristas del grafo?

Ejercicio 3:

Se dispone de 6 ordenadores y 9 cables de conexión y se necesita que cada ordenador se conecte con otros 3 ordenadores. ¿Existe alguna forma de conectarlos? ¿Y si existe es única?

Ejercicio 4:

Demostrar que si G carece de caminos cerrados entonces todos sus caminos son elementales.

Ejercicio 5:

Demostrar si es cierto que en un grafo conexo G toda cadena simple es elemental si y sólo si G es un árbol.

Ejercicio 6:

Demostrar que todo cociclo generado por un conjunto de vértices A, es también generado por el complemento de A $(X - A)$.

Ejercicio 7:

Sea G un grafo simple con n vértices y m aristas, cuyos vértices tienen grado k o $k + 1$. Demostrar que si G tiene n_k vértices de grado k entonces “ $n_k = (k + 1)n - 2m$ ”

Ejercicio 8:

Encontrar el número de aristas de cada uno de los siguientes grafos:

a) K_n

b) $K_{n,m}$

Ejercicio 9:

Demostrar los siguientes teoremas, sabiendo que:

- c es el número de componentes conexas que tiene el grafo.
- m es el número de aristas del grafo.
- n es el número de vértices.
- $\mu(G)$ es el número de ciclos de G y se obtiene como $\mu(G) = m - n + c$.

Teorema 2

Sea $G = \langle X, U, \gamma \rangle$ un digrafo de orden n (con $n > 1$). Las siguientes propiedades son equivalentes y cada una caracteriza una arborescencia:

(1) G es cuasi fuertemente conectado y sin ciclos.
(2) G es cuasi fuertemente conectado y tiene $n - 1$ arcos.
(3) G es un árbol con una raíz a.
(4) Existe un vértice a unido a todo vértice con un camino único.
(5) G es cuasi fuertemente conectado, y si un arco es sacado se pierde ésta propiedad.
(6) G es cuasi fuertemente conectado y $(\exists a \in X)(g^-(a) = 0) \wedge (\forall x \in X)(x \neq a) \Rightarrow (g^-(x) = 1)$.
(7) G es sin ciclos y $(\exists a \in X)(g^-(a) = 0) \wedge (\forall x \in X)(x \neq a) \Rightarrow (g^-(x) = 1)$.