Repaso de Conjuntos, Relaciones y Funciones

Año 2024

Conjuntos

Conjunto, elemento y la relación de pertenencia que los vincula son nociones primitivas. Esto significa que no se los puede definir. Conviene tomar como primitivos nociones intuitivas que se captan y comprenden por observación directa de la realidad. Además es imposible definir todo (piense por qué).

En general se usan letras mayúsculas para denotar conjuntos y letras minúsculas para denotar elementos de un conjunto.

La *pertenencia* de un elemento x a un conjunto A se denota como:

$$x \in A$$

Y para indicar que un elemento x *no pertenece* al conjunto A tachamos el símbolo de la relación (en forma consistente con la notación matemática de no igual, no paralelo, etc.):

$$x \notin A$$

No confundamos la imposibilidad de definir conjunto con la posibilidad de definir conjuntos concretos. Lo que no podremos definir es lo que es común a todos nuestros conjuntos concretos, "el ser conjunto".

Los matemáticos nos presentan dos modos de describir conjuntos: por comprensión y por extensión.

La definición por comprensión corresponde al concepto asociado. La lógica nos enseña que una definición esencial de un concepto tiene un género próximo y una diferencia específica.

Esto lo simbolizamos $\{x/x \in G \wedge \varphi(x)\}$, donde G representa el género próximo y φ la diferencia específica.

Con esta definición es sencillo comprobar si un elemento z pertenece a un conjunto, pero puede ser laborioso encontrar uno. Se corre el riesgo de olvidarse de especificar el género próximo lo cual constituye un error formal por cuanto necesitamos conocer el dominio de la función φ. No existen funciones evaluables sobre cualquier cosa. Así puedo definir los números pares como los números naturales divisibles por dos: 2, 4, 6,... el género próximo es "Natural" y la diferencia específica es "ser divisible por 2". Claramente de todo número natural puedo preguntar si es divisible por dos, pero ya suena extraño preguntarlo de un irracional y mucho más aún preguntarlo de una vaca. (ojo, la pregunta no es dividir la vaca en dos sino por dos). No existen funciones evaluables sobre cualquier cosa.

Cada conjunto tiene un *género próximo* que es el que dice desde donde provienen los elementos del conjunto, y además una *diferencia específica* que es la que define la condición para que uno de los objetos del superconjunto pertenezca al conjunto que nos interesa.

En la representación por extensión se listan los elementos del conjunto, sin importar el orden, separados por comas y encerrados entre llaves.

Cabe preguntarse si existen definiciones que originariamente hayan sido por extensión. Posiblemente la definición primaria haya sido por comprensión y su transmisión a terceros se realiza de un modo más expeditivo por extensión. Las definiciones por extensión por otra parte sólo son aplicables a conjuntos finitos y sin ayuda computacional a conjuntos no demasiado numerosos.

Ejemplo:

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$ representa por extensión el conjunto que por comprensión es:

$\{x/x$ es un número natural y $1 \leq x \leq 5\}$

$\square$

El conjunto que no posee elementos (*vacío*) se denota como $\{\}$ o $\varnothing$.

Cuando los elementos de un conjunto son conjuntos, para suavizar el lenguaje, se sustituye la primera ocurrencia de la palabra conjunto por familia y por lo tanto se habla de familia de conjuntos. Muchas teorías ponen nombres propios a sus elementos, por ejemplo la geometría habla de puntos.

Dados dos conjuntos A y B, si cada elemento de A es también un elemento de B, esto es, si para cualquier $x \in A$ entonces $x \in B$, decimos que A es un *subconjunto de* B, o que A está *contenido o incluido* en B, y lo escribimos de la siguiente forma:

$$A \subseteq B \stackrel{\triangle}{\equiv} (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$ [1]

Si A no es un subconjunto de B, escribimos:

$$A \nsubseteq B$$

Es inmediato que, para todo conjunto A se cumple que $\varnothing \subseteq A$ y que $A \subseteq A$.

La igualdad de dos conjuntos se define como:

$$A = B \stackrel{\triangle}{\equiv} A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Como consecuencia de esto muchas demostraciones de igualdad constan de 2 partes, las que corresponden a las dos demostraciones de inclusión.

Cuando un conjunto A es un subconjunto de otro B, pero ellos no pueden ser iguales, se dice que A es *subconjunto propio* de B, o que A está *incluido estrictamente* en B, y se denota por:

$$A \subset B$$

No hay una completa unanimidad en el uso de estos (y otros) símbolos. Para algunos el símbolo $\subset$ denota inclusión estricta y para otros inclusión. El mejor modo de descubrir a que convención se adhiere un autor es buscar en su texto que otro símbolo utiliza.

	Inclusión con igualdad	**Inclusión estricta**
Alternativa 1	$A \subseteq B$	$A \subset B$
Alternativa 2	$A \subset B$	$A \subsetneq B$

Ejemplo:

Sea el conjunto $\mathbb{P}$ de los números naturales pares y $\mathbb{M}$ el conjunto de los números múltiplos de 4; en simbolos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &= \{x \in \mathbb{N} / \exists y \in \mathbb{N} \wedge x = 2 \cdot y\} \\ \mathbb{M} &= \{x \in \mathbb{N} / \exists y \in \mathbb{N} \wedge x = 4 \cdot y\} \end{aligned}$$

[1] Si aparece el símbolo $\triangle$ sobre un símbolo de igualdad ($=$), o de equivalencia ($\equiv$), significa que es por definición.

Para demostrar que $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{P}$ tomamos un elemento cualquiera x, tal que si $x \in \mathbb{M}$ entonces $x \in \mathbb{P}$; en símbolos:

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{M} \quad &\Rightarrow \quad \text{(por definición de } \mathbb{M}) \;\; \exists y \in \mathbb{N} \wedge x = 4 \cdot y \\ &\Rightarrow \quad \text{(dado que } 4 = 2 \cdot 2) \;\; \exists y \in \mathbb{N} \wedge x = 2 \cdot 2 \cdot y \\ &\Rightarrow \quad \text{(si llamamos } z = 2 \cdot y) \;\; \exists z \in \mathbb{N} \wedge x = 2 \cdot z \\ &\Rightarrow \quad \text{(por definición de } \mathbb{P}) \;\; x \in \mathbb{P} \end{aligned}$$

c.q.d.

En cambio, sabemos que no todos los números pares son múltiplos de 4, así lo denotaríamos como $\mathbb{P} \nsubseteq \mathbb{M}$ y si quisiéramos demostrarlo bastaría con mostrar que existe un número par que no es múltiplo de 4; en símbolos:

$$2 \in \mathbb{P} \wedge 2 \notin \mathbb{M}, \text{ dado que } \nexists y \in \mathbb{N} \text{ tal que } 2 = 4 \cdot y$$

Es decir, la inclusión siempre se demuestra tomando un elemento genérico de un conjunto y llegar a que está en el otro y para demostrar la no inclusión basta con exhibir un elemento de un conjunto que no esté en el otro.

□

Una familia de conjuntos que usaremos mucho es la de los subconjuntos finitos iniciales de $\mathbb{N}$ (denotamos con $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales), su elemento genérico lo nombramos con $\mathbb{I}_n$ que es el conjunto de todos los números naturales entre 1 y n, en símbolos:

$$\mathbb{I}_n = \{i/i \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq i \leq n\}$$

Si A es un conjunto, entonces el conjunto de todos los posibles subconjuntos de A es llamado el *conjunto potencia* de A, o la *familia de partes* de A, y se denota por $\mathcal{P}(A)$ o 2^A.

Un conjunto A *finito* tiene n elementos distintos, donde $n \in \mathbb{N}$. En este caso n es llamada la *cardinalidad* de A y se denota por $\mid A \mid$.

Es fácil demostrar que si $\mid A \mid = n$, con $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mid \mathcal{P}(A) \mid = 2^n$ (o sea $\mid \mathcal{P}(A) \mid = 2^{|A|}$).

Observe, por ejemplo, que si $A = \{a, b, c\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Las operaciones básicas que se pueden aplicar a conjuntos son: *Unión*, *Intersección*, *Diferencia*, *Complemento* y *Diferencia Simétrica*.

Cada una de las operaciones tiene una definición precisa, sólo aplicable cuando comparten un mismo género próximo. Si no tuvieran un género superior común la unión sería siempre disjunta, la intersección vacía, etc.

En matemáticas informales se las define prescindiendo de la estructura de una definición por comprensión. Sean A y B conjuntos, se definen estas operaciones de la siguiente manera:

Unión:

$$A \cup B \stackrel{\triangle}{=} \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

Intersección:

$$A \cap B \stackrel{\triangle}{=} \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

Diferencia:

$$A - B \triangleq \{x/x \in A \land x \notin B\}$$

La definición del complemento presupone tener claro el universo en el cual nos encontramos trabajando. Debiera ser un género superior del conjunto (G). De él depende el resultado.

Complemento: donde $A \subseteq G$

$$\overline{A} = G - A \triangleq \{x/x \in G \land x \notin A\}$$

es necesario por lo tanto utilizar con precaución la operación de complementación.

Diferencia Simétrica:

$$A \Delta B \triangleq \{x/(x \in A \land x \notin B) \lor (x \in B \land x \notin A)\}$$

Las operaciones sobre conjuntos satisfacen muchas propiedades algebraicas. Las principales propiedades listadas aquí pueden ser probadas usando reglas de lógica y tablas de verdad, o con *diagramas de Venn*.

Teorema:

Las operaciones sobre conjuntos dadas anteriormente satisfacen las siguientes propiedades:

Propiedades Conmutativas:

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$

Propiedades Asociativas:

3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Propiedades Distributivas:

5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Propiedades de Idempotencia:

7. $A \cup A = A$
8. $A \cap A = A$

Propiedades del Complemento: dentro del Universo G

9. $\overline{(\overline{A})} = A$
10. $A \cup \overline{A} = G$
11. $A \cap \overline{A} = \varnothing$
12. $\overline{\varnothing} = G$

13. $\overline{G} = \varnothing$

14. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

15. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Estas dos últimas son las denominadas *Leyes de De Morgan*, y las propiedades distributivas entre unión e intersección son una consecuencia de ellas.

Propiedades del Conjunto Universal:

16. $A \cup G = G$ $\quad$ G es absorbente de la $\cup$

17. $A \cap G = A$ $\quad$ G es neutro de la $\cap$

Propiedades del Conjunto Vacío:

18. $A \cup \varnothing = A$ $\quad$ $\varnothing$ es neutro de la $\cup$

19. $A \cap \varnothing = \varnothing$ $\quad$ $\varnothing$ es absorbente de la $\cap$

En general si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son subconjuntos del conjunto G, la unión y la intersección se pueden generalizar, por ser ambas asociativas, y entonces $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ se denota por $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, (o $\bigcup_{i \in \mathbb{I}_n} A_i$ para que se vea claramente que no es relevante el orden en que se efectúen las operaciones) y $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ se denota por $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ (o $\bigcap_{i \in \mathbb{I}_n} A_i$).

Otro concepto importante aquí es el de *partición* de un conjunto no vacío A, ésta es una colección $\mathcal{P}$ de subconjuntos A_i ($\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$) de A tal que:

1. Cada $A_i \neq \varnothing$,
2. Cada elemento de A pertenece a uno de los conjuntos A_i en $\mathcal{P}$ ($\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A$) y
3. Si $A_i \neq A_j$, con $A_i \in \mathcal{P}$ y $A_j \in \mathcal{P}$, entonces $A_i \cap A_j = \varnothing$.

Los conjuntos en $\mathcal{P}$ son llamados también *bloques* de la partición.

Si sólo cumple 1 y 2 se tiene un *recubrimiento*.

Además entre conjuntos se define:

Producto Cartesiano:

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}$$

En este caso a cada elemento del conjunto resultado es un *par ordenado*, ya que necesitamos que (a, b) sea distinto de (b, a). El par ordenado no ha sido definido, podría tomarse como abreviatura de escrituras de conjuntos que hagan $(a, b) \neq (b, a)$, por ejemplo $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Si usa esta notación piense que significa $\{\{a\}\}$. De acuerdo a la definición, si A o B es el conjunto vacío entonces $A \times B$ es también el conjunto vacío.

El producto cartesiano no cumple con algunas de las propiedades algebraicas usuales (por ejemplo conmutativa, asociativa, idempotencia y elemento neutro), pero cumple con las siguientes:

Propiedades Distributivas:

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Relaciones Binarias

Dados dos conjuntos A y B no vacíos, una *relación binaria* R de A *en* B es cualquier subconjunto del producto cartesiano de A por B y lo denotamos $R \subseteq A \times B$, o también $R : A \longrightarrow B$.

De aquí se deduce que la mínima relación es el $\varnothing$ y que el conjunto universal de las relaciones de A en B es el conjunto $A \times B$.

Si $R \subseteq A \times B$, y $(x, y) \in R$, decimos que x está relacionado a y por R, y también se puede escribir $x R\, y$. Si x no está relacionado con y por R, escribimos $x \not R\, y$.

En general decimos que, si $R \subseteq A \times B$, el conjunto A es el *dominio* de R y que el conjunto B es el *contradominio o codominio* de R.

Sea $R \subseteq A \times B$, en algunas ocasiones vamos a llamar *dominio* de R al conjunto denotado por $Dom(R)$, que es el conjunto de los elementos del conjunto A los cuales están relacionados con algún elemento de B por R. Es decir, $Dom(R)$ es un subconjunto de A formado por aquellos elementos que aparecen como primera componente en los pares ordenados de R. De forma similar se define el *rango* de una relación, denotado por $Ran(R)$, al conjunto de todos los elementos en B que son segunda componente en los pares ordenados de R, es decir los elementos de B que están relacionados a algún elemento de A por R.

Se define como *relación conversa (o inversa)* de R a la relación contenida en $B \times A$ que cumple:

$$R^{-1} \stackrel{\triangle}{=} \{(x, y)/(y, x) \in R\}$$

$$R \subseteq A \times B \Leftrightarrow R^{-1} \subseteq B \times A$$

Si $R \subseteq A \times B$, el conjunto de todos los elementos que están relacionados por R con un elemento $x \in A$ se denomina como la *imagen* de x por R y se denota por:

$$R(x) \stackrel{\triangle}{=} \{y/y \in B \wedge (x, y) \in R\}$$

Las relaciones pueden ser clasificadas de acuerdo a si tienen ciertas características básicas, ellas son: *total*, *función*, *inyectiva* y *sobreyectiva*.

Sea $R \subseteq A \times B$, entonces estas características se definen como:

Total:

Una relación es total si todos los elementos de A están relacionados con algún elemento de B, en símbolos:

$$Total(R) \stackrel{\triangle}{\equiv} (\forall x \in A)(\exists y \in B)(xRy)$$

Función:

$$\textit{Función}(R) \stackrel{\triangle}{\equiv} (\forall x \in A)(\forall y, y' \in B)(xRy \wedge xRy' \Rightarrow y = y')$$

Inyectiva:

$$Inyectiva(R) \stackrel{\triangle}{\equiv} (\forall x, x' \in A)(\forall y \in B)(xRy \wedge x'Ry \Rightarrow x = x')$$

Sobreyectiva:

$$Sobreyectiva(R) \stackrel{\triangle}{\equiv} (\forall y \in B)(\exists x \in A)(xRy)$$

Para simbolizar que características tiene una relación $R : A — B$ usamos la siguiente notación:

Total	$R : A \vdash\!\!— B$
Función	$R : A \rightarrow B$
Inyectiva	$R : A \leftarrow B$
Sobreyectiva	$R : A —\!\!\dashv B$

y cuando una relación cumple con más de una superponemos los símbolos que representan cada una de estas características. Por ejemplo, si R es total, función e inyectiva lo simbolizaríamos: $R : A \vdash\!\!\longleftrightarrow B$.

Cuando una relación es una función en general usamos otras letras para nombrarla y por ejemplo escribiremos $f : A \rightarrow B$, lo cual indica que f es una relación incluida en $A \times B$ que además cumple con ser función. Y en este caso si $(x, y) \in f$ también lo simbolizamos como $f(x) = y$, llamando a y el valor de la función en x o la imagen de x bajo f.

Para relaciones se define la operación de *composición* de la siguiente manera:

Sean $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$

$$R \circ S \stackrel{\triangle}{\equiv} \{(x, z)/(\exists y \in B)(x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\} \text{ y}$$

$$R \subseteq A \times B \wedge S \subseteq B \times C \Leftrightarrow R \circ S \subseteq A \times C$$

Esta operación cumple con:

Propiedad Asociativa:

Sean $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ y $T \subseteq C \times D$

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$$

Esta operación no tiene un elemento neutro, ya que no existe una relación que operada a izquierda y a derecha de cualquier relación funcione como tal; pero si puede definirse para cada relación un par de relaciones tales que:

Sea $R \subseteq A \times B$, y sean $I_A \subseteq A \times A$ y $I_B \subseteq B \times B$, tal que:

$$I_A = \{(x, x)/x \in A\} \text{ (neutro a izquierda) y}$$

$$I_B = \{(x, x)/x \in B\} \text{ (neutro a derecha) entonces}$$

$$I_A \circ R = R \circ I_B = R$$

También se puede definir lo que es una *restricción de una relación* R ($R \subseteq A \times B$) a un subconjunto $X \subseteq A$ de la siguiente manera:

$$R_{|X} \stackrel{\triangle}{\equiv} \{(x, y)/(x, y) \in R \wedge x \in X\}$$

$$R \subseteq A \times B \wedge X \subseteq A \Leftrightarrow R_{|X} \subseteq X \times B$$

Se puede generalizar la noción de producto cartesiano para n conjuntos como:

$$\mathrm{X}_{\alpha=1}^{n} C_\alpha \stackrel{\triangle}{\equiv} \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)/x_\alpha \in C_\alpha \; para \; 1 \leq \alpha \leq n\}$$

pero ello habla de *n-uplas* ordenadas.

Esta definición es cuestionable y no abre la posibilidad de productos infinitos y de cualquier grado de infinitud. La forma más adecuada de expresarlo es:

$$\mathrm{X}_{\alpha\in\mathcal{I}}\, C_\alpha \triangleq \{f/f : \mathcal{I} \longmapsto \bigcup_{\alpha\in\mathcal{I}} C_\alpha \wedge (\forall\beta\in\mathcal{I})\ (f(\beta)\in C_\beta)\}$$

El producto cartesiano, de acuerdo a esta definición, se ve como el conjunto de todas las funciones totales que se pueden definir desde el conjunto de índices a la unión de los conjuntos C; de manera tal que el valor que devuelva la función para cada uno de los índices sea un valor del conjunto que tiene ese índice.

Dicho de otra manera cada elemento del producto cartesiano será una determinada función que a cada índice le dé un valor del conjunto correspondiente, esta función sería el objeto que se corresponde con el de n-upla de la otra definición pero no ordenada, ya que una función no tiene orden entre sus elementos.

Por ejemplo, si $C_1 = \{a, b\}$, $C_4 = \{j\}$ y $C_2 = \{x, y, z\}$, y siendo $\mathcal{I} = \{2, 1, 4\}$

$$\mathrm{X}_{\alpha\in\mathcal{I}}\, C_\alpha = \{\{(1,a),(4,j),(2,x)\},\{(2,y),(4,j),(1,a)\},\{(1,a),(2,z),(4,j)\},\{(1,b),(4,j),(2,x)\},\\ \{(1,b),(4,j),(2,y)\},\{(4,j),(2,z),(1,b)\}\}$$

Esto mismo, factorizado, puede escribirse de una manera más sencilla pero menos matemática:

1	**4**	**2**
a	j	x
a	j	y
a	j	z
b	j	x
b	j	y
b	j	z

Y también debería quedar claro que si muevo cualquiera de las columnas de lugar, arrastrando también su título, estaré describiendo el mismo conjunto.

Esta definición tiene la ventaja de no exigir que $\mathcal{I}$ sea un conjunto ordenado.

En Informática todo es finito (pero no necesariamente acotado) pero usar esta definición tiene ventajas como veremos más adelante.

De igual forma uno puede considerar cualquier subconjunto de un producto cartesiano de n conjuntos como una relación *n-aria*, en símbolos:

$R \subseteq \mathrm{X}_{\alpha\in\mathbb{I}_n} C_\alpha$ y por abuso de simbología en algunos casos se denota por:

$R \subseteq C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_n$

En este tipo de relaciones no se extienden directamente las propiedades de las relaciones binarias.

Si se observa la definición de sobreyectividad y totalidad se verá su similitud intercambiando el papel de X y de Y. De aquí parece tener sentido poder hablar de *totalidad de una relación respecto de* C_i, lo cual indicará que en la relación aparecen todos los valores del conjunto C_i. Es más se podría hablar de totalidad respecto del producto de varios conjuntos, lo cual aplicado a una relación binaria ($R \subseteq A \times B$) sólo hubiera caracterizado a la relación universal ($R = A \times B$).

Lo mismo puede observarse respecto de la definición de inyectividad y función, y pensar en hablar que una relación se comporta como una función de uno o más conjuntos C_i respecto de uno o más conjuntos C_j.

Relaciones binarias con dominio y codominio coincidentes

Decimos que una relación R que tiene dominio y codominio coincidentes, o sea $R \subseteq A \times A$, es una relación binaria *sobre* el conjunto A o también se suele decir definida *sobre* el conjunto A.

En este caso la restricción de una relación $R \subseteq A \times A$ a un subconjunto X de A se define como:

$$R_{|X} = \{(x, y)/(x, y) \in R \wedge x, y \in X\}$$
$$R \subseteq A \times A \;\wedge\; X \subseteq A \Leftrightarrow R_{|X} \subseteq X \times X$$

En este tipo de relaciones se pueden analizar, además de las propiedades generales de relaciones (Total, función, inyectiva y sobreyectiva), otras que son : *Reflexiva*, *Antirreflexiva*, *Simétrica*, *Antisimétrica*, *Débilmente Antisimétrica*, *Transitiva* y *Completa* o *Total*.

Sea $R \subseteq A \times A$, entonces estas propiedades se definen como:

Reflexiva:

$$Reflexiva(R) \stackrel{\triangle}{\equiv} (\forall x \in A)(x R\, x)$$

Antirreflexiva:

$$Antirreflexiva(R) \stackrel{\triangle}{\equiv} (\forall x \in A)(x \not R\, x)$$

Simétrica:

$$\textit{Simétrica}(R) \stackrel{\triangle}{\equiv} (\forall x, y \in A)(x R\, y \Rightarrow y R\, x)$$

Antisimétrica:

$$\textit{Antisimétrica}(R) \stackrel{\triangle}{\equiv} (\forall x, y \in A)(x R\, y \Rightarrow y \not R\, x)$$

Débilmente Antisimétrica:

$$\textit{Débilmente Antisimétrica}(R) \stackrel{\triangle}{\equiv} (\forall x, y \in A)(x R\, y \wedge y R\, x \Rightarrow x = y)$$

Transitiva:

$$Transitiva(R) \stackrel{\triangle}{\equiv} (\forall x, y, z \in A)(x R\, y \wedge y R\, z \Rightarrow x R\, z)$$

Circular

$$Circular(R) \stackrel{\triangle}{\equiv} (\forall x, y, z \in A)(x R\, y \wedge y R\, z \Rightarrow z R\, x)$$

Completa (o Total):

$$Completa(R) \stackrel{\triangle}{\equiv} (\forall x, y \in A)(x R\, y \vee y R\, x)$$

Observación: Dada una relación R con dominio y codominio coincidentes se cumple que:

1. Si R es *circular* y *reflexiva* entonces R es *transitiva* y *simétrica*.
2. Si R es *simétrica* y *transitiva* entonces R es *circular*.
3. R es *circular* y *reflexiva* si solo si R es *transitiva* y *simétrica*.

La demostración de estas tres propiedades queda como ejercicio para el lector.

Además de poder analizar cada una de estas propiedades individualmente, cuando se cumplen para una relación cierto conjunto de estas propiedades, ellas pueden recibir distintos nombres: *Preorden*, *Orden* (u *Orden Parcial*), *Orden Total*, *Buen Orden* y *Equivalencia*.

Siendo R una relación definida sobre el conjunto A, cada una de ellas se define como sigue:

Preorden:

$$Preorden(R) \stackrel{\triangle}{\equiv} Reflexiva(R) \wedge Transitiva(R)$$

Orden:

$$Orden(R) \stackrel{\triangle}{\equiv} Preorden(R) \wedge \textit{Débilmente Antisimétrica}(R)$$

Orden Total:

$$OrdenTotal(R) \stackrel{\triangle}{\equiv} Orden(R) \wedge Completa(R)$$

Buen Orden:

$$BuenOrden(R) \stackrel{\triangle}{\equiv} OrdenTotal(R) \wedge (\forall X \subseteq A)(X \neq \varnothing \Rightarrow (\exists a \in X)(\forall x \in X)(aR\,x))$$

Equivalencia:

$$Equivalencia(R) \stackrel{\triangle}{\equiv} Reflexiva(R) \wedge \textit{Simétrica}(R) \wedge Transitiva(R)$$

o de otra manera

$$Equivalencia(R) \stackrel{\triangle}{\equiv} Reflexiva(R) \wedge Circular(R)$$

Ejemplo:

Sea la relación R de "divisibilidad" entre números naturales; es decir $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tal que si $x, y \in \mathbb{N}$, $(x, y) \in R$ si y sólo si $\dfrac{x}{y} \in \mathbb{N}$.

Vamos a analizar qué propiedades cumple:

Reflexiva: sea un $x \in \mathbb{N}$ cualquiera, $\dfrac{x}{x} = 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow (x, x) \in R$, entonces R es reflexiva.

Antirreflexiva: como ya vimos que es reflexiva, no puede ser antirreflexiva. Otra forma de analizarlo sería: $4 \in \mathbb{N}$ y $(4, 4) \in R$; es decir, mostramos un par de la forma $(x, x) \in R$ y entonces no puede ser antirreflexiva.

Simétrica: sean 4 y $1 \in \mathbb{N}$, $\dfrac{4}{1} = 4 \in \mathbb{N} \Rightarrow (4, 1) \in R$, pero $\dfrac{1}{4} \notin \mathbb{N} \Rightarrow (1, 4) \notin R$, entonces R no es simétrica.

Antisimétrica: aunque no es simétrica tampoco es antisimétrica, dado que podemos exhibir un par de la forma $(x, y) \in R$ donde también $(y, x) \in R$, por ejemplo el par $(4, 4) \in R$.

Débilmente Antisimétrica: sean $x, y \in \mathbb{N}$ cualesquiera, si $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow \dfrac{x}{y} \in \mathbb{N} \wedge \dfrac{y}{x} \in \mathbb{N}$, pero eso significa que $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $x = y \cdot k \wedge y = x \cdot \frac{1}{k}$, pero la única forma en que se cumplan ambas igualdades en $\mathbb{N}$ es cuando $k = 1$, entonces $x = y$. Por lo tanto, R es débilmente antisimétrica.

Transitiva: sean $x, y, z \in \mathbb{N}$ cualesquiera, si $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow \dfrac{x}{y} \in \mathbb{N} \wedge \dfrac{y}{z} \in \mathbb{N}$, así para que los cocientes sean números naturales $\exists n, m \in \mathbb{N}$ tales que $x = n \cdot y \wedge y = m \cdot z \Rightarrow \exists n, m \in \mathbb{N}$ tales que reemplazando $x = n \cdot m \cdot z$, así $\dfrac{x}{z} \in \mathbb{N} \Rightarrow (x, z) \in R$. Por lo tanto, R es transitiva.

Circular: como R no es simétrica, R no puede ser circular.

Completa: R no es completa ya que $5, 3 \in \mathbb{N}$ y $(5, 3) \notin R$ y $(3, 5) \notin R$.

Ahora podemos clasificar a R:

Preorden: R es un preorden ya que es reflexiva y transitiva.

Orden: como R es un preorden y R es débilmente antisimétrica, entonces R es una relación de orden.

Orden Total: R no es un orden total porque R no es completa.

Buen Orden: R no es un buen orden ya que por ejemplo en el conjunto $X = \{3, 5, 7\} \subset \mathbb{N}$, ninguno de sus elementos cumple que esté relacionado a todos los demás elementos del conjunto.

Equivalencia: R no es una relación de equivalencia porque R no es simétrica.

Queda como ejercicio verificar si R es total, función, inyectiva o sobreyectiva.

$\square$

Ejemplos:

La relación de inclusión "$\subseteq$" en una familia de conjuntos, es un Orden. En general no surgirá que sea total. Cuando se tiene certeza que no es total se lo suele llamar *Orden Parcial*.

La relación "$\leq$" entre los números naturales es una relación de Orden Total, y además es un Buen Orden.

La relación de "$=$" entre conjuntos, es una relación de Equivalencia, también "paralelismo entre rectas".

Demostrar que los cuatro ejemplos planteados son ciertos es muy sencillo y queda como ejercicio.

$\square$

Cuando una relación R, definida sobre un conjunto A, cumple con ser una relación de Orden entonces se dice que R *ordena (parcialmente)* al conjunto A. Si R es una relación de Orden Total sobre A se dice que R lo *ordena totalmente* (o *completamente*, o *linealmente*). Si R es un Buen Orden sobre A entonces se dice que A es bien ordenado por R.

Cuando se trabaja con relaciones con dominio y codominio coincidentes hay propiedades de la operación de composición que trivialmente son válidas y que en el caso general no se cumplían. Por ejemplo la propiedad conmutativa y la existencia de un elemento neutro (que ahora es Δ_A).

Si $R \subseteq A \times A$ es una relación de Equivalencia y x un elemento de A se denomina *clase de equivalencia de x* al conjunto $R(x)$, pero en este caso lo denotamos con $R_{[x]}$ para evidenciar que R es una relación de equivalencia. Es sencillo demostrar que la familia de todas las clases de equivalencia por R de los elementos de A forma una partición del conjunto A, en este caso a la partición se la denomina *conjunto cociente* de A por R y se lo denota por $A_{/R}$. De forma simétrica, es fácil también ver que dada una partición $\mathcal{P}$ del conjunto A (con $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$) podemos definir una relación de equivalencia $R_{\mathcal{P}}$ inducida por dicha partición de la siguiente manera:

$$R_{\mathcal{P}} \triangleq \{(x, y)/(\exists i)(x, y \in A_i)\}$$

■