Teoría de Grafos: Primera Parte

Año 2024

Introducción

En muchos problemas originados en Ciencias de la Computación, Matemáticas, Ingeniería y muchas otras disciplinas, habitualmente es necesario representar "relaciones" arbitrarias entre objetos de datos. Los *grafos* en general son modelos naturales de tales "relaciones" y por ello los estudiaremos en el ámbito de nuestra asignatura.

Además la Teoría de Grafos juega un papel importante en la fundamentación matemática de las Ciencias de la Computación. Los grafos constituyen una herramienta básica para modelizar fenómenos discretos y son fundamentales para la comprensión de las estructuras de datos y el análisis de algoritmos.

Formalmente, en lo que respecta al estudio de grafos, existen dos teorías que se estudian a la par aunque tienen aspectos diferentes:

- Grafos no dirigidos.
- Grafos dirigidos o digrafos.

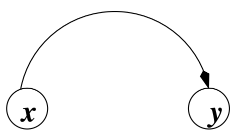
La Teoría de Grafos en general es útil por la terminología que incorpora (enriquecimiento de vocabulario), ya que permite ver situaciones que pueden modelizarse usando los grafos y sus soluciones ya conocidas. Además, esta teoría aporta formas típicas de razonamiento.

Comenzamos introduciendo la terminología básica para estudiar grafos y digrafos (o grafos dirigidos).

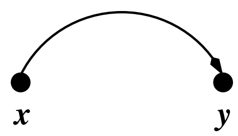
Intuitivamente, un *digrafo* es un conjunto de puntos y un conjunto de flechas que unen pares de puntos. Los puntos son llamados *vértices* del digrafo y las flechas son llamadas los *arcos* del digrafo. Un *grafo* es un conjunto de *puntos* y un conjunto de *aristas* o *lados* (sin dirección) que unen pares de puntos.

El conjunto de vértices se denota usualmente con X y el conjunto de arcos con U.

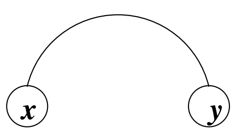
Los vértices en general se grafican con puntos o círculos, y si x e y son vértices y hay un arco entre x e y, lo graficamos de la siguiente manera:



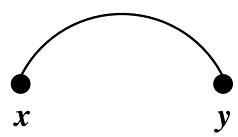
o



En el caso de un grafo, si hay una arista entre x e y la graficamos como:



o



Veamos un ejemplo de un digrafo G (Figura 1), al que usaremos a lo largo de este apunte, para mostrar lo que en cada caso nos interese.

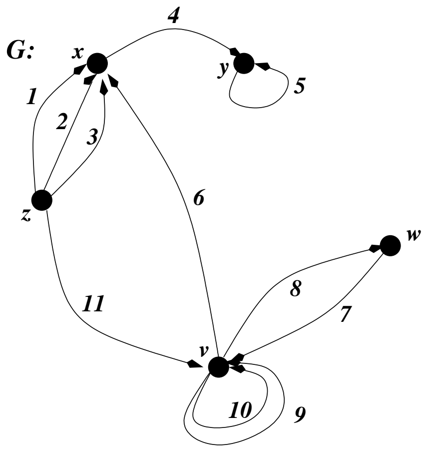


Figura 1: Ejemplo del digrafo que usaremos a lo largo del apunte.

$$X = \{x, y, z, v, w\}, \qquad U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}.$$

Ejemplo:

Observando el digrafo del ejemplo (Figura 1), vemos que el arco 6 va desde el vértice v al vértice x. El arco 2 va desde el vértice z al vértice x. El arco 2, aunque tiene la misma forma que los arcos 1 y 3, no deben confundirse con ellos porque son elementos distintos.

□

La posición de los vértices en la representación gráfica de un grafo o digrafo carece de importancia, lo importante es cuáles vértices están unidos por cuáles arcos. Por lo tanto, un digrafo está completamente definido por sus vértices, sus arcos y los vértices que unen esos arcos.

La diferencia más importante entre grafos y digrafos es que en los grafos las líneas que unen a los vértices no hacen distinción entre ellos, y a ambos se los denomina extremos de la arista; en cambio en digrafos las líneas que unen a los vértices poseen un vértice desde el que parten y otro al que llegan, llamados extremos inicial y final del arco.

En general estamos más interesados en digrafos que en grafos, pero la teoría de grafos no dirigidos posee algunos conceptos que pueden aplicarse también a digrafos y que son de gran interés.

Especificaciones Formales de Grafos y Digrafos

Veamos algunas definiciones formales:

Definición: Un digrafo G está definido por una terna $\langle X, U, \gamma \rangle$ donde:

(1) X: es un conjunto de elementos llamados *vértices* o *nodos*, y $0 < |X| < \infty$.

(2) U: es un conjunto de elementos llamados *arcos*, y $0 \leq |U| < \infty$.

(3) γ: es una función que se denomina *función de incidencia* y se define como:

$$\gamma : U \longmapsto X^2$$

es decir, la función γ se aplica a los arcos y devuelve pares de vértices [1]. Esta función indica qué par de vértices une cada arco de U. ◇

[1] Observar que en nuestra notación estamos expresando que γ debe ser función y total.

Como en los digrafos existe distinción entre los vértices que une un arco, se define:

Definición: Sea $u \in U$, si $\gamma(u) = (x, y)$, con $x, y \in X$, el vértice x es llamado *vértice inicial* y el vértice y es llamado *vértice final* del arco u. $\diamond$

Definición: Los arcos de U que tienen igual vértice inicial y final se denominan *arcos paralelos* (o por algunos autores *arcos múltiples*). $\diamond$

En el digrafo de Figura 1 los arcos 1,2 y 3 son paralelos, y también lo son los arcos 9 y 10.

Hay sistematizaciones de teoría de grafos que se quedan sólo con $\langle X, U\rangle$, donde $U \subseteq X^{\,2}$ (U es una relación finita); entonces, a un arco se lo caracteriza completamente por sus extremos y, por lo tanto, no se pueden tener arcos paralelos entre un par de vértices.

Notar que, de acuerdo a nuestra definición, un par de vértices $(x, y) \in X^{\,2}$ puede aparecer más de una vez como imagen de la función γ.

Si la función de incidencia fuese inyectiva, ningún par de vértices de $X^{\,2}$ podría aparecer más de una vez como imagen de γ (recordar cuándo una función era inyectiva).

<u>Nota:</u> Usaremos subscriptos para X, U, y γ (es decir, X_G, U_G, y γ_G), para indicar a qué grafo nos referimos, cuando no estemos considerando un único grafo (digrafo) G.

Ejemplo: en el digrafo de la Figura 1 la función de incidencia es la siguiente:

$$\begin{array}{llll} \gamma(1) = \gamma(2) = \gamma(3) = (z, x), & \gamma(4) = (x, y), & \gamma(5) = (y, y), & \gamma(6) = (v, x), \\ \gamma(7) = (w, v), & \gamma(8) = (v, w), & \gamma(9) = \gamma(10) = (v, v), & \gamma(11) = (z, v). \end{array}$$

la que también podría expresarse como:

$$\gamma = \{(1, (z, x)), (2, (z, x)), (3, (z, x)), (4, (x, y)), (5, (y, y)), (6, (v, x)),$$
$$(7, (w, v)), (8, (v, w)), (9, (v, v)), (10, (v, v)), (11, (z, v)\}$$

$\square$

Como la función de incidencia γ no es necesariamente inyectiva, su inversa γ^{-1} no siempre sería función. Pero, si dado un par de vértices cualesquiera $(x, y) \in X^{\,2}$ queremos obtener qué arcos los tienen como extremos (es decir, imagen por γ de qué arcos sería este par de vértices), podemos redefinir la inversa de γ para que sea función:

Definición: Sea un digrafo $G = \langle X, U, \gamma\rangle$ se define la *función inversa* de la función de incidencia como:

$$\gamma^{-1} : X^{\,2} \longmapsto 2^U. \quad ^2$$

$\diamond$

Ahora al aplicar la función γ^{-1} a un par de vértices obtenemos un subconjunto de U (que puede en algunos casos ser el conjunto $\varnothing$), que tienen a ese par de vértices como extremos.

Para analizar: ¿γ^{-1} puede ser inyectiva? ¿γ^{-1} puede ser sobreyectiva?

Definición: Un digrafo G en el que ningún elemento de $X^{\,2}$ está unido por más de p arcos, o aparece más de p veces como imagen de γ, se denomina *p–digrafo*. En símbolos:

[2] Recordar que 2^A denota la familia de partes del conjunto A.

$$G \text{ es un } p\text{–digrafo} \Leftrightarrow p = \max_{(x,y)\in X^{2}} \{ \mid \gamma^{-1}(x,y) \mid \}.$$

$\diamond$

Si la función γ de un digrafo fuese inyectiva, p sería menor o igual a 1 y en ese caso sería un 1–digrafo. En un 1–digrafo G no existen arcos paralelos y entonces se podría ver a G como $\langle X, E\rangle$, donde $E \subseteq X^{2}$, que es como aparecen caracterizados los digrafos comúnmente en la bibliografía.

Definición: El *orden* de un digrafo (grafo) G es el número de vértices. En símbolos [3]:

$$orden(G) \stackrel{def}{=} \mid X \mid$$

. $\diamond$

Definición: Un digrafo (grafo) G se denomina *trivial* si no tiene arcos. En símbolos:

$$trivial(G) \stackrel{def}{\equiv} \mid U \mid = 0.$$

$\diamond$

Definición: Un arco $u \in U$ de G tal que $\gamma(u) = (x, x)$, para $x \in X$, se denomina *bucle* (*loop*). $\diamond$

En general los bucles carecen de interés y dependerá de la situación particular que se esté modelizando que tenga sentido, o no, considerarlos.

Si la función γ de un digrafo G fuese sobreyectiva, todo par de vértices aparecería como extremos de al menos un arco y, por lo tanto, habría al menos un bucle en cada vértice.

Para definir los grafos necesitamos introducir previamente una nueva convención. Sea A un conjunto, denotábamos con 2^{A} a la familia de partes del conjunto A, y ahora denotaremos con $2^{A}_{1,2}$ al conjunto formado por todos los subconjuntos de A de cardinalidad 1 y 2.

Definición: Un grafo G está definido por una terna $\langle X, U, \gamma\rangle$, donde:

(1) X: es un conjunto de elementos llamados *vértices* o *nodos*, y $0 < \mid X \mid < \infty$.

(2) U: es un conjunto de elementos llamados *aristas*, y $0 \leq \mid U \mid < \infty$.

(3) γ: es la función que se denomina *función de incidencia* y se define como:

$$\gamma : U \longmapsto 2^{X}_{1,2}$$

es decir, la función γ se aplica a los arcos y devuelve conjuntos de uno o dos vértices. Esta función dice qué vértices une cada arista de U. $\diamond$

Así, queda claro que los vértices que une una arista no son distinguibles entre sí, porque en un conjunto no hay orden.

Los conjuntos de cardinalidad uno son necesarios para los bucles, ya que un conjunto no admite elementos repetidos (un par de X^{2} sí).

La función γ es total, también en este caso, pero no necesariamente inyectiva ni sobreyectiva.

Dado un digrafo G, se denomina *grafo sostén* o *grafo subyacente* o *grafo soporte* de G al grafo que se obtiene eliminando el sentido a los arcos (es decir, transformando los arcos en aristas). A la inversa,

[3] Usaremos el símbolo de igualdad "$\stackrel{def}{=}$", o el de equivalencia $\stackrel{def}{\equiv}$, para explicitar que ellas se dan por definición.

si deseamos convertir un grafo a digrafo, debemos transformar cada arista en 2 arcos (uno de ida y otro de vuelta), salvo los bucles que se convierten en un único arco.

Veamos en el siguiente ejemplo el grafo subyacente del digrafo de Figura 1:

Ejemplo:

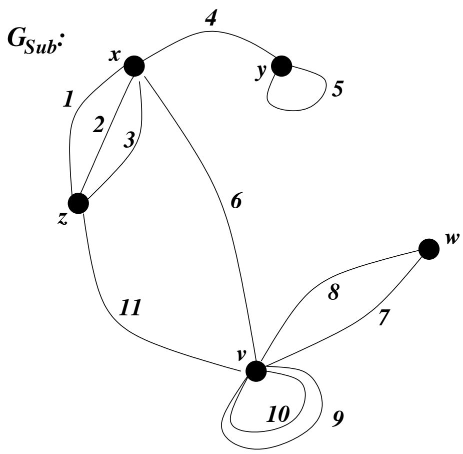


Figura 2: Grafo subyacente del grafo ilustrado en Figura 1.

$$X = \{x, y, z, v, w\}, \qquad U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}.$$

$$\gamma(1) = \gamma(2) = \gamma(3) = \{z, x\}, \quad \gamma(4) = \{x, y\}, \quad \gamma(5) = \{y\}, \quad \gamma(6) = \{x, v\},$$
$$\gamma(7) = \gamma(8) = \{v, w\}, \quad \gamma(9) = \gamma(10) = \{v\}, \quad \gamma(11) = \{z, v\}.$$

la que también podría expresarse como:

$$\gamma = \{(1, \{z, x\}), (2, \{z, x\}), (3, \{z, x\}), (4, \{x, y\}), (5, \{y\}), (6, \{x, v\}),$$
$$(7, \{v, w\}), (8, \{v, w\}), (9, \{v\}), (10, \{v\}, (11, \{z, v\})\} \qquad \square$$

Terminología: En general vamos a trabajar sobre digrafos, porque nuestro principal interés está centrado en ellos; pero, por simplicidad, hablaremos de grafos. Cuando por contexto esto no sea deducible o cuando los conceptos provengan de, o sólo se apliquen a, una de las dos estructuras explicitaremos a cuál de ellas nos estamos refiriendo.

En algunos casos nos puede interesar recuperar cuál es el vértice inicial (final) de un arco u de U. Para ello, necesitamos una función que obtenga el primer (segundo) elemento del par devuelto por la función al hacer $\gamma(u)$. Recordando algunas funciones utilizadas por lenguajes funcionales, y usando composición de funciones, podemos crear las siguientes funciones:

$\gamma_1 = 1 \circ \gamma$ para obtener la primera componente del par, y

$\gamma_2 = 2 \circ \gamma$ para obtener la segunda componente del par.

Pero, para dejar claro que no se podría tener una función γ_3, usaremos para ellas un supraíndice "$-$" para la que obtiene primera componente ($\gamma^- = 1 \circ \gamma$) y "$+$" para la que obtiene la segunda ($\gamma^+ = 2 \circ \gamma$) [4].

Definición: Se definen las funciones de *incidencia negativa* ($\gamma^- = 1 \circ \gamma$) y *positiva* ($\gamma^+ = 2 \circ \gamma$) como:

$$\gamma^-, \gamma^+ : U \longmapsto X.$$

[4]Con esta nomenclatura, usando símbolos de un alfabeto binario, intentamos que sea evidente que no hay otras posibilidades, salvo negativo y positivo.

◇

Estas nuevas funciones son totales, pero no necesariamente inyectivas ni sobreyectivas. Por ejemplo, si γ^+ fuese sobreyectiva implicaría que cada vértice de X es destino de al menos un arco de U; y si fuese inyectiva, significaría que no existen dos arcos distintos que tuvieran a un mismo vértice como destino.

Definición: Un vértice $y \in X$ se denomina *sucesor* de un vértice $x \in X$ si existe un arco $u \in U$ que tiene a x como extremo inicial y a y como extremo final, en símbolos:

$$y \textit{ sucesor de } x \Leftrightarrow (\exists u \in U)\gamma(u) = (x, y), \text{ o equivalentemente}$$

$$y \textit{ sucesor de } x \Leftrightarrow (\exists u \in U)\ \ \gamma^-(u) = x \wedge \gamma^+(u) = y.$$ ◇

De manera similar:

Definición: Un vértice $x \in X$ se denomina *predecesor* de un vértice $y \in X$ si existe un arco $u \in U$ que tiene a x como extremo inicial y a y como extremo final, en símbolos:

$$x \textit{ predecesor de } y \Leftrightarrow (\exists u \in U)\gamma(u) = (x, y).$$ ◇

Además podemos decir que:

Definición: Dos vértices x_1 y $x_2 \in X$ son *adyacentes* si están unidos por un arco (arista) de U. ◇

Definición: Dos arcos (aristas) u_1 y $u_2 \in U$ se dicen *adyacentes* si tienen al menos un extremo común.◇

Definición de Nuevas Funciones

Nos puede interesar no sólo saber si un vértice x es, o no, sucesor (predecesor) de un vértice y, sino también saber cuáles son "todos" los sucesores (predecesores) de un determinado vértice. Entonces, definimos:

Definición: El conjunto de todos los *vértices sucesores* de un vértice $x \in X$ se obtiene con la función $\Gamma^+(x)$, la cual se define formalmente:

$$\Gamma^+ : X \longmapsto 2^X \ \text{ tal que}$$

$$\Gamma^+(x) \stackrel{def}{=} \{y/(\exists u \in U) \wedge \gamma(u) = (x, y)\}.$$ ◇

De manera similar:

Definición: El conjunto de todos los *vértices predecesores* de un vértice $x \in X$ se obtiene con la función $\Gamma^-(x)$, la cual se define formalmente:

$$\Gamma^- : X \longmapsto 2^X \ \text{ tal que}$$

$$\Gamma^-(x) \stackrel{def}{=} \{y/(\exists u \in U) \wedge \gamma(u) = (y, x)\}.$$ ◇

Definición: El conjunto de los vértices *vecinos* de un vértice $x \in X$ se obtiene con la función $\Gamma(x)$, la cual se define formalmente como:

$$\Gamma : X \longmapsto 2^X \ \text{ tal que}$$

$$\Gamma(x) \stackrel{def}{=} \Gamma^-(x) \cup \Gamma^+(x).$$ ◇

Las funciones Γ^-, Γ^+ y Γ son totales; pero, ¿son o pueden ser inyectivas? ¿son o pueden ser sobreyectivas?

Además, dado un vértice nos puede interesar obtener cuáles son los arcos que parten (llegan) a él. Por ello definimos:

Definición: Se define la función ω^+ que permite obtener el *conjunto de arcos salientes* de un vértice $x \in X$ como:

$$\omega^+ : X \longmapsto 2^U \text{ tal que:}$$
$$\omega^+(x) \stackrel{def}{=} \{u/u \in U \wedge \gamma^-(u) = x\}. \qquad \diamond$$

Definición: Se define la función ω^- que permite obtener el *conjunto de arcos entrantes* a un vértice $x \in X$ como:

$$\omega^- : X \longmapsto 2^U \text{ tal que:}$$
$$\omega^-(x) \stackrel{def}{=} \{u/u \in U \wedge \gamma^+(u) = x\}. \qquad \diamond$$

Observar que las funciones ω^- y ω^+ se pueden definir también como:

$$\omega^+ \stackrel{def}{=} (\gamma^-)^{-1} \quad \text{y} \quad \omega^- \stackrel{def}{=} (\gamma^+)^{-1}$$ [5]

y son funciones y totales; pero, en general, no serán ni inyectivas ni sobreyectivas. ¿Por qué?

Ahora, a partir de las dos funciones ω^+ y ω^- podemos definir:

Definición: Se define la función ω, que permite obtener el *conjunto de arcos salientes y entrantes* de un vértice $x \in X$, como:

$$\omega : X \longmapsto 2^U \text{ tal que:}$$
$$\omega(x) \stackrel{def}{=} \omega^-(x) \cup \omega^+(x) \stackrel{def}{=} \{u/u \in U \wedge (\gamma^-(u) = x \vee \gamma^+(u) = x)\} \qquad \diamond$$

Si en el vértice x hay un bucle, éste es tanto un arco saliente como entrante. Entonces, aparecerá tanto en ω^- como en ω^+; pero, al ser una unión de conjuntos, sólo aparecerá una vez en ω.

Todos los arcos que pertenecen a un $\omega(x)$ son adyacentes entre sí, por tener un vértice extremo común.

Si extendemos el dominio de las funciones γ^- y γ^+ a conjuntos de arcos, cada una de ellas obtendría el conjunto formado por el extremo inicial/final de cada uno de los arcos del conjunto. Luego, usando composición de funciones, se pueden obtener las funciones Γ^- y Γ^+ de la siguiente manera:

$$\Gamma^- = \gamma^- \circ \omega^- \text{ tal que } \Gamma^-(x) = \gamma^-(\omega^-(x)) \text{ y}$$
$$\Gamma^+ = \gamma^+ \circ \omega^+ \text{ tal que } \Gamma^+(x) = \gamma^+(\omega^+(x)).$$

La idea intuitiva detrás de esta manera de obtener el conjunto de predecesores (sucesores) de un vértice x es:

1º) obtener todos los arcos que llegan a (salen de) x y

2º) obtener el extremo inicial (final) de cada uno de los arcos que llegaban a (salían de) x.

Ahora que podemos obtener el conjunto de arcos salientes de (entrantes a) un vértice x, podemos contar cuántos arcos salen de (entran a) él. Por lo tanto, definimos:

[5] Recordar cómo se hacía para que la inversa de una función no inyectiva sea función.

Definición: Se define la función g^+, denominada *grado de salida*, de un vértice $x \in X$ a la cantidad de arcos salientes de x como:

$$g^+ : X \longmapsto \mathbb{N}_0 \quad \text{tal que:}$$
$$g^+(x) \stackrel{def}{=} |\ \omega^+(x)\ |. \qquad \diamond$$

Definición: Se define la función g^-, *grado de entrada*, de un vértice $x \in X$ a la cantidad de arcos entrantes a x como:

$$g^- : X \longmapsto \mathbb{N}_0 \quad \text{tal que:}$$
$$g^-(x) \stackrel{def}{=} |\ \omega^-(x)\ |. \qquad \diamond$$

Así definimos también:

Definición: Se define la función g, *grado* [6], de un vértice $x \in X$ a la cantidad de arcos salientes o entrantes de x como:

$$g : X \longmapsto \mathbb{N}_0 \quad \text{tal que:}$$
$$g(x) \stackrel{def}{=} |\ \omega(x)\ | = |\ \omega^+(x) \cup \omega^-(x)\ |. \qquad \diamond$$

Podemos observar que si el grafo no tuviera bucles, podríamos haber definido a $g(x)$ como $g^-(x) + g^+(x)$; pero si tiene bucles, éstos se podrían contar en ambas funciones y por lo tanto el resultado final sería incorrecto.

Terminología: Siempre que las funciones posean como supraíndices los símbolos "$+$" o "$-$" se podrán aplicar sólo a digrafos, porque estos símbolos llevan implícita la dirección de lo que se está considerando. Las funciones restantes, en general, se podrán aplicar en grafos o digrafos de acuerdo a las consideraciones particulares de cada caso.

Ejemplo:

Considerando el digrafo de la Figura 1,

- podemos afirmar que:
  a) $orden(G) = 5$.
  b) G no es trivial, porque $|\ U\ | > 0$.
  c) γ no es inyectiva ni sobreyectiva.
  d) G es un 3-digrafo.

- y además podemos decir que:
  1. el vértice x es sucesor del vértice z, debido a los tres arcos 1, 2 y 3.
  2. los vértices x y z son adyacentes.
  3. el vértice v es predecesor de w debido al arco 8.
  4. el vértice z no es sucesor de ningún vértice; pero, es predecesor de los vértices x y v.
  5. los arcos 5, 9 y 10 son bucles.
  6. los arcos 1, 2 y 3 son arcos paralelos, y también los arcos 9 y 10.

[6] En el caso de grafos no dirigidos, esta función se suele denominar también como *valencia* del vértice

7. $\gamma^{-}(4) = x = \gamma^{+}(1) = \gamma^{+}(2) = \gamma^{+}(3) = \gamma^{+}(6)$.
8. los arcos 1, 2, 3, 4 y 6 son adyacentes.
9. $\gamma^{-1}(x,y) = \{4\}$, $\gamma^{-1}(y,x) = \varnothing$, $\gamma^{-1}(z,x) = \{1,2,3\}$, $\gamma^{-1}(v,v) = \{9,10\}$.
10. $\Gamma^{+}(x) = \{y\}$, $\Gamma^{-}(x) = \{v,z\}$, $\Gamma(x) = \{y,v,z\}$, $\Gamma^{-}(z) = \varnothing$, $\Gamma^{+}(z) = \{x,v\}$, $\Gamma(z) = \{x,v\}$, $\Gamma^{+}(y) = \{y\}$, $\Gamma^{-}(y) = \{x,y\}$, $\Gamma(y) = \{x,y\}$, $\Gamma^{+}(v) = \{v,x,w\}$, $\Gamma^{-}(v) = \{v,z,w\}$, $\Gamma(v) = \{v,x,z,w\}$.
11. $\omega(x) = \{1,2,3,4,6\}$, $\omega^{+}(v) = \{6,8,9,10\}$, $\omega^{-}(v) = \{7,9,10,11\}$, $\omega(v) = \{6,7,8,9,10,11\}$, $\omega^{-}(z) = \varnothing$.
12. $g(x) = 5$, $g^{+}(x) = 1$, $g^{+}(v) = 4$, $g^{-}(v) = 4$, $g(v) = 6$, $g^{-}(z) = 0$.

$\square$

Características de los Vértices

Utilizando las funciones ya analizadas, podemos distinguir los vértices que cumplen con la característica de estar desvinculados del resto de los vértices del grafo.

Definición: Un vértice $x \in X$ se denomina *aislado* si no le salen ni le llegan arcos, salvo bucles. En símbolos:

$$\textit{vértice aislado}(x) \overset{def}{\equiv} g(x) = 0 \ \text{ si el grafo no posee bucles;}$$

en otro caso:

$$\textit{vértice aislado}(x) \overset{def}{\equiv} \Gamma(x) - \{x\} = \varnothing.$$

$\diamond$

Observar que si un vértice x posee un bucle será $g(x) > 0$.

Pueden definirse otras características sobre los vértices usando las funciones ω y Γ.

Definición: Un vértice $x \in X$ se denomina *fuente* si no le llegan arcos. En símbolos:

$$\textit{fuente}(x) \overset{def}{\equiv} g^{-}(x) = 0, \quad \text{o}$$
$$\textit{fuente}(x) \overset{def}{\equiv} \omega^{-}(x) = \varnothing, \quad \text{o}$$
$$\textit{fuente}(x) \overset{def}{\equiv} \Gamma^{-}(x) = \varnothing.$$

$\diamond$

Definición: Un vértice $x \in X$ se denomina *sumidero* si no le salen arcos. En símbolos:

$$\textit{sumidero}(x) \overset{def}{\equiv} g^{+}(x) = 0, \quad \text{o}$$
$$\textit{sumidero}(x) \overset{def}{\equiv} \omega^{+}(x) = \varnothing, \quad \text{o}$$
$$\textit{sumidero}(x) \overset{def}{\equiv} \Gamma^{+}(x) = \varnothing.$$

$\diamond$

Ejemplo: de grafos dirigidos representando distintas realidades posibles:

a) X: puestos de trabajo en una empresa y U: ascensos posibles.

b) X: materias y U: correlatividades para cursar.

c) X: personas y U: maternidad.

d) X: paradas de ómnibus y U: recorrido o secuencialidad de paradas.

e) X: clubes y U: partidos ganados o perdidos.

f) X: alumnos $\cup$ actividades y U: realización (los arcos van de alumnos a actividades).

g) X: estados de un autómata y U: transición entre estados.

En casi todos estos casos no tienen sentido los bucles, salvo en el caso de un autómata.

En muchos de estos casos no tiene sentido tener arcos múltiples. Sin embargo, sí tienen sentido en el caso d) si se representan varias líneas de ómnibus que van entre las paradas. Lo mismo ocurre en el caso e) de los clubes, ya que es posible que dos clubes hayan competido más de una vez y haya ganado más de una vez el mismo club.

Por ejemplo en el caso b) los vértices que representan a materias que no son requeridas para rendir otras materias serán sumideros y aquellas materias que no necesitan conocimiento de materias anteriores serán fuentes. Se podrían tener aquí también vértices aislados, si existen materias que no requieren haber cursado otras ni son requeridas de cursar por otras, aunque en general no es muy común. □

Características de Grafos o Digrafos

Definición: Un digrafo (grafo) G es *regular* si todos los vértices tienen el mismo grado. En símbolos:

$$regular(G) \overset{def}{\equiv} (\forall x, y \in X)\ \ g(x) = g(y).$$

◇

<u>Nota:</u> Si un grafo (digrafo) G es regular y si $(\forall x \in X)\ \ g(x) = k$, decimos que G es $k - regular$.

Se puede extender el dominio de las funciones Γ^+, Γ^- y Γ a conjuntos de vértices y en ese caso tendríamos:

$$\Gamma^+, \Gamma^-, \Gamma : 2^X \longmapsto 2^X.$$

donde si $A \subseteq X$ entonces:

$$\Gamma^+(A) = \bigcup_{a \in A} \Gamma^+(a),$$
$$\Gamma^-(A) = \bigcup_{a \in A} \Gamma^-(a) \ \ \text{y}$$
$$\Gamma(A) = \bigcup_{a \in A} \Gamma(a).$$

Si $x \notin A$ y $x \in \Gamma(A)$ entonces x es *adyacente* a A. Por lo tanto, para obtener el conjunto de los vértices adyacentes al conjunto A hacemos $\Gamma(A) - A$ (en caso de querer los vértices adyacentes a x haríamos $\Gamma(x) - \{x\}$).

Un 1-digrafo también puede caracterizarse completamente por $\langle X, \Gamma^+ \rangle$.

En un 1-digrafo se pueden analizar características que eran propias de relaciones de dominio y rango coincidentes. Por ejemplo, se puede estudiar si un 1-digrafo es simétrico, reflexivo, transitivo, entre otras propiedades.

Definición: Un 1-digrafo es *simétrico* si:

$$(\forall u \in U)(\gamma(u) = (x, y) \Rightarrow (\exists u' \in U)\ (\gamma(u') = (y, x))).$$

◇

Definiciones similares podrían plantearse para las demás características.

Cuando γ no es inyectiva, o sea cuando no es un 1-digrafo, también pueden analizarse algunas de estas propiedades; pero, se complican sus definiciones porque se deben tener en cuenta los arcos paralelos. Por ejemplo tenemos que:

Definición: Un digrafo es *simétrico* si:

$$(\forall x, y \in X) \mid \gamma^{-1}(x, y) \mid = \mid \gamma^{-1}(y, x) \mid.$$

◇

Definición: Un grafo G se dice *completo* si hay al menos una arista entre cada par de vértices distintos. En símbolos:

$$completo(G) \overset{def}{\equiv} (\forall x, y \in X)(x \neq y \Rightarrow (\exists u \in U)(\gamma(u) = \{x, y\})).$$

◇

Definición: Un digrafo G se dice *completo* si hay al menos un arco entre cada par de vértices distintos. En símbolos:

$$completo(G) \overset{def}{\equiv} (\forall x, y \in X)(x \neq y \Rightarrow \mid \gamma^{-1}(x, y) \mid + \mid \gamma^{-1}(y, x) \mid \geq 1).$$

◇

Observar que, en este caso, sólo se pide que para cada par de vértices distintos exista al menos un arco entre ellos, ya que con este requerimiento se asegura que el grafo subyacente también será completo. Notar que no es necesario pedir que haya al menos dos arcos (uno en un sentido y otro en sentido contrario) para que el digrafo considerado sea completo.

Definición: Un digrafo (grafo) G se dice *simple* si no tiene bucles ni arcos (aristas) paralelos.

◇

Definición: Un digrafo (grafo) G simple y completo con n vértices se denomina n-*clique*.

◇

Nota: Usaremos $\mathbf{K_n}$ para referenciar a un grafo (digrafo) G que es un n-clique.

Ejemplo: sea el siguiente grafo:

El grafo de Figura 3 es un 5-clique y por consiguiente se denomina K_5. Además es regular, y como cada vértice tiene grado 4, es 4-regular. □

Al considerar relaciones binarias, $R \subseteq X \times Y$, teníamos en general dos situaciones posibles:

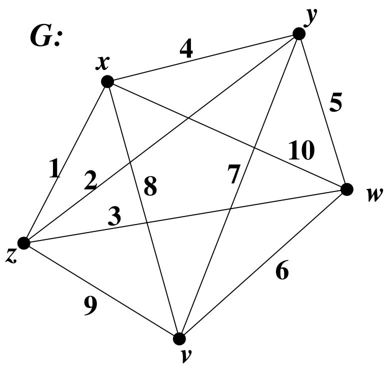


Figura 3: Ejemplo de un 5-clique (K_5).

a) $X = Y$: si éste era el caso podíamos analizar: reflexividad, transitividad, simetría, etc...

b) $X \neq Y$: se podía analizar: función, inyectiva, total y sobreyectiva.

La teoría de los grafos dirigidos sirve para modelizar ambos tipos de relaciones. Si $X \neq Y$ vemos al conjunto de vértices como una unión de dos conjuntos disjuntos. En este caso definimos:

Definición: Un digrafo $G = \langle X, U, \gamma \rangle$ [7] es *bipartito* si:

1. $X = X_1 \cup X_2$, donde $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ y $X_1 \neq \varnothing$ y $X_2 \neq \varnothing$ (es decir, $\{X_1, X_2\}$ es una partición de X) ,

2. γ: es la función de incidencia, la cual se define como:

$$\gamma : U \longmapsto (X_1 \times X_2) \cup (X_2 \times X_1)$$

es decir, la función γ se aplica a los arcos y devuelve pares de vértices donde la primera componente pertenece a X_1 y la segunda a X_2, y viceversa; pero no pueden haber dos componentes del mismo conjunto. Los arcos vinculan elementos de conjuntos distintos. $\diamond$

Claramente, por la definición de γ, no se admiten bucles en un digrafo bipartito; pero sí se pueden tener arcos paralelos.

Todas las funciones definidas previamente se aplican a los digrafos bipartitos; sólo que, en algunos casos, se podrían restringir más sus dominios y codominios para reflejar el hecho de que existen dos subconjuntos de vértices disjuntos y que los arcos van desde un conjunto al otro.

También se pueden definir grafos bipartitos, en ellos las aristas poseen extremos en conjuntos distintos y por consiguiente tampoco se admiten los bucles; pero ellos sí pueden tener aristas paralelas. El único cuidado que se debe tener en su definición consiste en cómo describir subconjuntos de X de cardinalidad dos, pero con un elemento de X_1 y el otro de X_2.

En los grafos o digrafos bipartitos dos vértices del mismo conjunto no pueden ser adyacentes.

Definición: Un digrafo (grafo) bipartito $G = \langle X, U, \gamma \rangle$ es *bipartito completo* si para todo $x_1 \in X_1$ y para todo $x_2 \in X_2$ se tiene que existe al menos un arco (arista) que los une. $\diamond$

[7]En este caso, para mayor claridad, se puede expresar el digrafo bipartito como: $G = \langle X_1, X_2, U, \gamma \rangle$.

Nota: Usaremos $K_{n,m}$ para referirnos a un digrafo (grafo) simple, bipartito y completo, donde $\mid X_1 \mid= n$ y $\mid X_2 \mid= m$.

Ejemplo: sea el siguiente grafo:

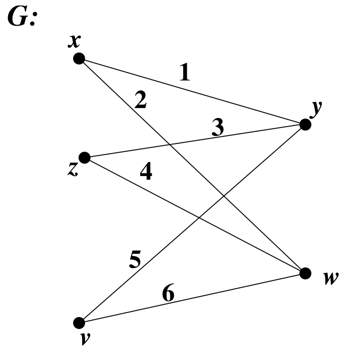


Figura 4: Ejemplo de un grafo bipartito completo $K_{3,2}$.

El grafo de la Figura 4 es un grafo bipartito, los vértices ubicados a la izquierda forman uno de los conjuntos ($X_1 = \{x, v, z\}$) y los de la derecha el otro ($X_2 = \{y, w\}$). En este caso como además es simple y completo podemos decir que es un $K_{3,2}$. Claramente, este grafo bipartito no es regular ya que los vértices de X_1 tienen todos grado 2 y en cambio todos los vértices de X_2 tienen grado 3. Para que un grafo bipartito completo fuese regular las cardinalidades de los dos conjuntos deberían ser iguales. ¿Por qué?

Observar que la forma más clara de graficarlos, encolumnando los vértices de cada conjunto, ayuda a la mejor visualización de los grafos bipartitos, pero ello no es necesario. El grafo de Figura 5 es el mismo de la Figura 4, pero en él se han ubicado los vértices en distinta posición.

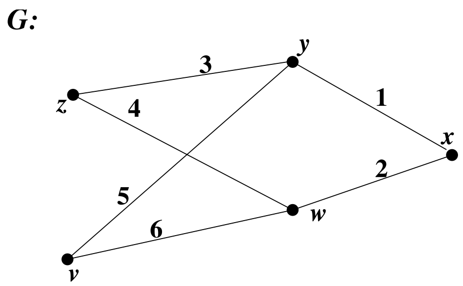


Figura 5: Otra representación gráfica del grafo bipartito completo de Figura 4.

$\square$

Subgrafos y Grafos Parciales

Ahora vamos a analizar cómo nos podemos referir a ciertas partes de un grafo, que a su vez son grafos.

Definición: Un digrafo (grafo) $H = \langle X_H, U_H, \gamma_H \rangle$ es *digrafo* (*grafo*) *parcial* de un digrafo (grafo) G si:

1. $X_H = X_G$,
2. $U_H \subseteq U_G$,
3. γ_H es la restricción de la función de incidencia γ_G al dominio U_H, en símbolos:

$$\gamma_H = \gamma_{G_{|U_H}}$$

es decir, se restringe el dominio de la función γ_G para quedarse sólo con aquellos arcos (aristas) que pertenecen a U_H. ◇

Por lo tanto, en γ_H para los arcos (aristas) de U_H se obtienen los mismos vértices que se obtenían en γ_G, pero no puede aplicarse a aquellos arcos (aristas) de $U_G - U_H$.

A este tipo de grafo se lo suele denominar también grafo parcial de G *generado por* U_H, dado que toda la información de este grafo depende de G y de U_H. En otras palabras, es exactamente el grafo G sin los arcos (aristas) de $U_G - U_H$.

Definición: Un digrafo (grafo) $H = \langle X_H, U_H, \gamma_H \rangle$ es *subdigrafo* (*subgrafo*) de un digrafo (grafo) G si:

1. $X_H \subseteq X_G$,
2. $U_H = U_G \cap \gamma^{-1}({X_H}^2)$, [8]
3. γ_H es la restricción de la función de incidencia γ_G al dominio U_H, en símbolos:

$$\gamma_H = \gamma_{G_{|U_H}}$$

es decir, se restringe el dominio de la función γ_G para quedarse sólo con aquellos arcos (aristas) que pertenecen a U_H. ◇

A este tipo de grafo se lo suele denominar también subgrafo de G generado por X_H, dado que toda la información de este grafo depende de G y de X_H. En otras palabras, es exactamente el grafo G sin los vértices de $X_G - X_H$ y en el cual quedan sólo los arcos (aristas) que tienen ambos extremos en X_H.

Ambas definiciones se pueden combinar para definir:

Definición: Un digrafo (grafo) $H = \langle X_H, U_H, \gamma_H \rangle$ es *subdigrafo* (*subgrafo*) *parcial* de un digrafo (grafo) G si H es:

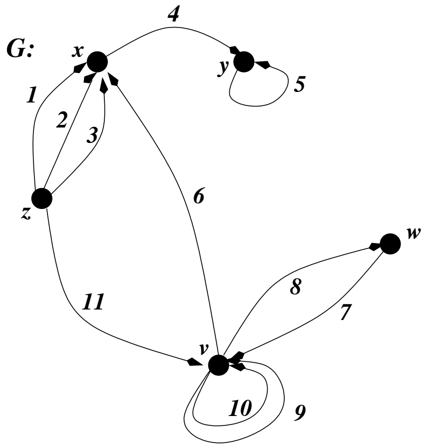
1. un subdigrafo (subgrafo) de un digrafo (grafo) parcial de G o
2. un digrafo (grafo) parcial de un subdigrafo (subgrafo) de G. ◇

En un subgrafo parcial H de un grafo G tenemos que $X_H \subseteq X_G$ y además que $U_H \subseteq U_G$; pero con la precaución de que los arcos (aristas) de U_H tienen extremos en X_H. La función de incidencia restringe su dominio sólo a aquellos arcos (aristas) de U_H.

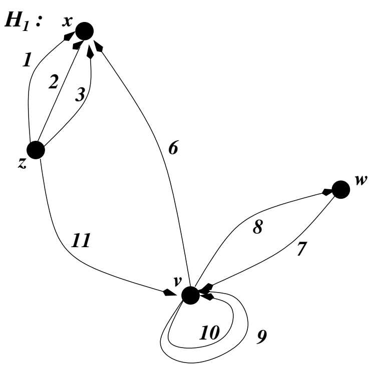
Todo grafo es subgrafo, grafo parcial y subgrafo parcial de sí mismo, pero carece de sentido aplicar estas denominaciones en este caso.

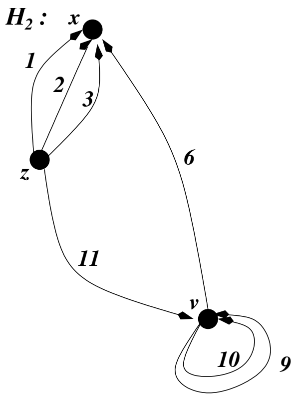
[8] En realidad no es necesaria la intersección, ya que $\gamma^{-1}({X_H}^2)$ devolverá sólo arcos (aristas) que pertenecían a U_G, pero lo colocamos explícitamente para evidenciar que no obtenemos arcos (aristas) nuevos.

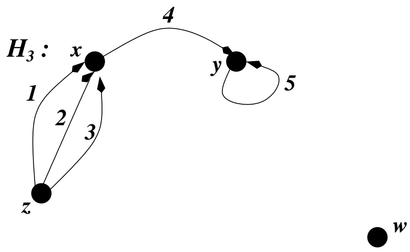
Ejemplo: sea el grafo G de Figura 1,



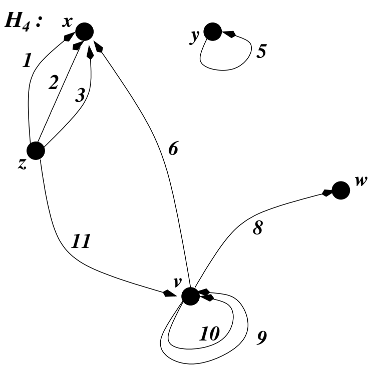
los siguientes grafos son ejemplos de subgrafos de G:

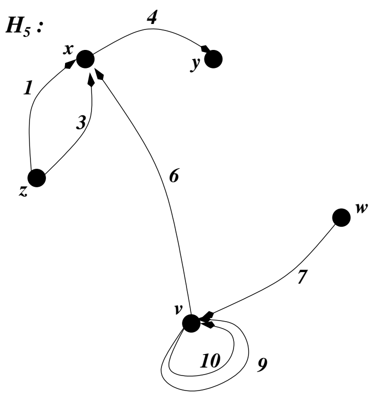


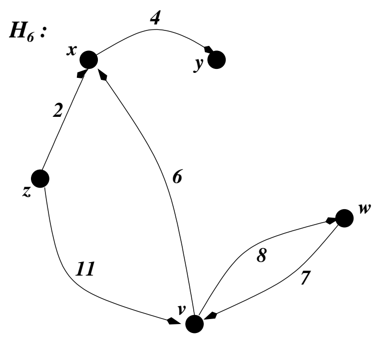




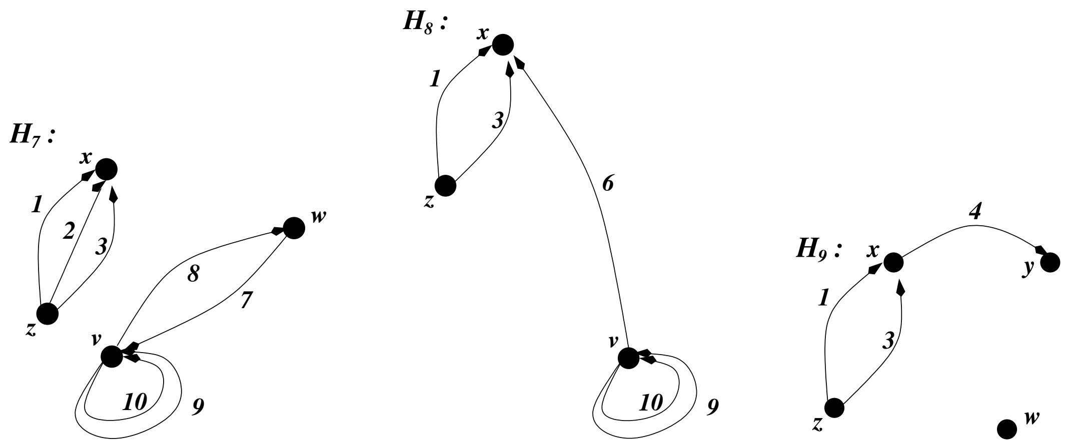
los siguientes grafos son ejemplos de grafos parciales de G:







los siguientes grafos son ejemplos de subgrafos parciales de G:



El grafo H_7 es grafo parcial de H_1, el cual a su vez era subgrafo de G.

El grafo H_8 es subgrafo de H_5, el cual a su vez era grafo parcial de G.

El grafo H_9 es grafo parcial de H_3, el cual a su vez era subgrafo de G.

$\square$

La propiedad de subgrafo se propaga transitivamente, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} G_1 \text{ es subgrafo de } G \\ \\ G_2 \text{ es subgrafo de } G_1 \end{array}\right\} \Rightarrow G_2 \text{ es subgrafo de } G$$

Lo mismo podemos decir para los grafos parciales, dado que la propagación transitiva es en realidad propio de las subestructuras en general.

Cadenas, Caminos, Ciclos y Circuitos

Ahora veremos otros conceptos que aparecen siempre que trabajamos con grafos y digrafos. Hablaremos en general de arcos, aunque cuando no nos interese el sentido de los arcos podríamos hablar de aristas indistintamente.

Definición: Una *cadena* es una secuencia $\mu = (u_1, u_2, \ldots, u_q)$ de arcos de G (donde cada $u_i \in U$, con $i = 1, \ldots, q$), tal que cada u_i de la secuencia tiene un extremo común con u_{i-1} y su otro extremo en común con u_{i+1}, salvo u_1 y u_q. $\diamond$

<u>Nota:</u> Los vértices no emparejados de u_1 y de u_q se denominan los *extremos* de la cadena μ. Cuando se conoce que el extremo no emparejado de u_1 es el vértice x y que el de u_q es el vértice y, entonces la cadena se puede denotar como $\mu[x, y]$.

Definición: El número de arcos de la secuencia se denomina la *longitud* de la cadena $\mu = (u_1, u_2, \ldots, u_q)$, que en este caso sería q. $\diamond$

Definición: Una cadena μ se denomina *elemental* si no encuentra, o pasa, por el mismo vértice más de una vez [9]. $\diamond$

Definición: Una cadena μ se denomina *simple* si no usa el mismo arco más de una vez, en otro caso, se denomina *compuesta*. $\diamond$

[9] Exceptuando los vértices extremos de la cadena.

Definición: Una cadena μ se denomina *cerrada* si los dos extremos de la cadena son el mismo vértice. $\diamond$

Si una cadena es no simple y su longitud es mayor que 2 no será elemental. Esto es porque al usar un mismo arco más de una vez, éste va a repetir sus vértices extremos en la cadena, y entonces no será elemental. Así, no puede tenerse una cadena elemental abierta (no cerrada) de longitud mayor que 2 que no sea simple.

Toda cadena elemental abierta (no cerrada) es simple.

Toda cadena elemental cerrada de longitud mayor que 2 es simple.

Resumiendo tenemos que:

$$\text{Cadenas}\begin{cases}\text{no simples}\\ \\ \text{simples}\begin{cases}\text{no elementales}\\ \\ \text{elementales}\end{cases}\end{cases}$$

Dadas dos cadenas, mediante la concatenación de sus secuencias de arcos no siempre es posible obtener una nueva cadena.

Realmente el concepto de cadena es propio de los grafos y es heredado por los digrafos, aunque hayamos hablado de arcos no nos interesaba su sentido.

Definición: Un *camino* es una secuencia $\mu = (u_1, u_2, \ldots, u_q)$ de arcos de G (donde cada $u_i \in U$, con $i = 1, \ldots, q$) tal que cada $\gamma^+(u_i) = \gamma^-(u_{i+1})$ para todo $i < q$ (o lo que es lo mismo $\gamma^+(u_{i-1}) = \gamma^-(u_i)$ y $\gamma^+(u_i) = \gamma^-(u_{i+1})$ para todo $1 < i < q$). $\diamond$

Nota: Si $\gamma^-(u_1) = x$ es el *extremo inicial* y $\gamma^+(u_q) = y$ es el *extremo final* del camino μ, entonces el camino se puede escribir como $\mu[x, y]$.

En un 1-digrafo un camino se puede describir dando la secuencia de vértices por los cuales se pasa, ya que desde un vértice x a otro vértice y hay a lo sumo un arco que tiene como extremo inicial a x y como extremo final a y. Por lo tanto, si la secuencia de vértices que se encuentran en el camino es $x_1, x_2, \ldots, x_q, x_{q+1}$, se puede escribir:

$$\mu = ((x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_q, x_{q+1})) = [x_1, x_2, \ldots, x_q, x_{q+1}] = \mu[x_1, x_{q+1}].$$

De manera similar, para un grafo simple (sin bucles ni arcos paralelos) una cadena puede ser descripta por la secuencia de sus vértices.

El concepto de camino es propio de los digrafos y no se aplica a grafos. Un camino es un caso particular de cadena (posee más restricciones), pero no toda cadena es camino.

Definición: Se denomina *longitud* del camino $\mu = (u_1, u_2, \ldots, u_q)$ al número de arcos de la secuencia, que en este caso sería q. $\diamond$

Definición: Un camino μ se denomina *elemental* si no encuentra el mismo vértice más de una vez. $\diamond$

Definición: Un camino μ se denomina *simple* si no usa el mismo arco más de una vez. $\diamond$

Definición: Un camino $\mu = (u_1, u_2, \ldots, u_q)$ se denomina *cerrado* si $\gamma^-(u_1) = \gamma^+(u_q)$. $\diamond$

Todo camino elemental es simple, ya que si no fuera simple implicaría que usó un arco más de una vez, y por lo tanto pasó por sus vértices extremos más de una vez.

Definición: Una cadena μ es un *ciclo* si es simple y es cerrada. $\diamond$

Definición: Un *pseudo-ciclo* es una cadena $\mu = (u_1, u_2, \ldots, u_q)$ cerrada y cuyos arcos no son necesariamente distintos. $\diamond$

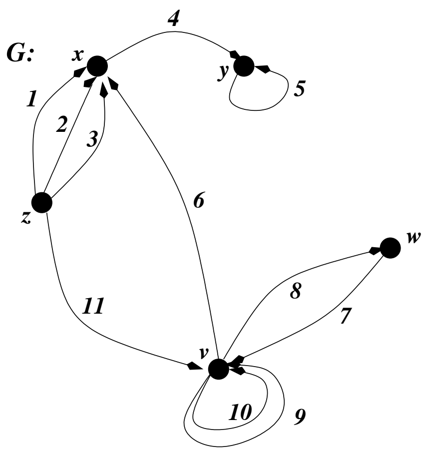
Definición: Una secuencia de arcos $\mu = (u_1, u_2, \ldots, u_q)$ es un *circuito* si cumple con ser un ciclo y además un camino. $\diamond$

Otra manera de caracterizar un circuito es:

1. $(\forall 1 \leq i, j \leq q)$ si $i \neq j$ entonces $u_i \neq u_j$,
2. $(\forall i < q)\ \gamma^+(u_i) = \gamma^-(u_{i+1})$ y
3. $\gamma^-(u_1) = \gamma^+(u_q)$.

De acuerdo a la definición todo circuito es un ciclo, pero la inversa no es cierta.

Ejemplo: sea el grafo G de Figura 1, analicemos sobre él distintas secuencias de arcos:



$\mu_1 = (1, 2, 3)$ es cadena (extremos x y z), no elemental, pero si simple.

$\mu_2 = (4, 6, 9, 7)$ es cadena (extremos y y w), no elemental, pero si simple.

$\mu_3 = (1, 1)$ es una cadena no simple y elemental, pero cerrada (su longitud es ≤ 2).

$\mu_4 = (11, 6, 4, 5)$ es cadena, camino (extremo inicial: z, y final: y), simple y no elemental.

$\mu_5 = (1, 4, 11)$ no es cadena, ni camino.

$\mu_6 = (7, 8, 7, 10, 8)$ es cadena, camino, no simple, no elemental, cerrada y es pseudo-ciclo.

$\mu_7 = (7, 8)$ es cadena, camino, simple, elemental, cerrada, ciclo y circuito. $\square$

Los conceptos de cadena y camino tienen que ver con la idea de moverse desde un vértice para alcanzar a otro (sin importar el sentido de los arcos o teniéndolo en cuenta). Sin embargo, un vértice puede alcanzarse a sí mismo sin usar arco alguno; entonces, asumimos que por definición existen cadenas y caminos de longitud nula desde un vértice a sí mismo.

Conexidad

Ahora podemos ver otras definiciones que tienen que ver con las conexiones que existen entre vértices, la primera proviene de los grafos y la segunda de los digrafos.

Definición: Un grafo G se dice *conexo* si para cada par de vértices x e y existe una cadena de x a y. En símbolos:

$$conexo(G) \stackrel{def}{\equiv} (\forall x, y \in X) \text{ existe una cadena de } x \text{ a } y.$$

$\diamond$

Definición: Un grafo G se dice *fuertemente conexo* si para cada par de vértices x e y existe una camino de x a y. En símbolos:

$$fuertemente\ \ conexo(G) \stackrel{def}{\equiv} (\forall x, y \in X) \text{ existe un camino de } x \text{ a } y.$$

$\diamond$

Si un grafo no es conectado pueden existir partes de él que lo sean, entonces definimos:

Definición: Cada subgrafo conexo maximal (en cantidad de vértices o nodos) [10] de un grafo G es una *componente conexa* de G. $\diamond$

Definición: Cada subgrafo fuertemente conexo maximal de un grafo G es una *componente fuertemente conexa* o *bloque* de G. $\diamond$

Analicemos estas características desde otro punto de vista. Para ello, definimos dos relaciones distintas sobre el conjunto de vértices. Sean $E_C \subseteq X^2$ y $E_{FC} \subseteq X^2$ las relaciones que se definen de la siguiente manera:

$xE_Cy \Leftrightarrow$ existe una cadena entre x e y.

$xE_{FC}y \Leftrightarrow$ existe un camino de x a y, y existe un camino de y a x.

Ya que estas relaciones tienen dominio y rango coincidentes, podemos tratar de clasificarlas de acuerdo a las características que ellas satisfacen (reflexiva, antirreflexiva, transitiva, etc...).

	Reflexiva	Antirrefl.	Simétrica	Antisim.	Antisim. débil	Transitiva	Completa
E_C	Sí	No	Sí	No	¿?	Sí	¿?
E_{FC}	Sí	No	Sí	No	¿?	Sí	¿?

Se pueden demostrar cada una de las afirmaciones o negaciones hechas, usando las definiciones de las relaciones, y las de cadena y camino. Cuando depende del grafo particular si las propiedades se podrían satisfacer, o no, lo indicamos con "¿?". Por ejemplo:

- ambas relaciones son reflexivas, porque por definición ya vimos que siempre existen cadenas y caminos de longitud nula de un vértice a sí mismo;
- ambas son simétricas porque:
  1. Supongamos que xE_Cy, entonces sea $\mu = (u_1, \ldots, u_q)$ la cadena entre x e y. Si invertimos esa cadena, y dado que no interesa el sentido de los arcos, obtenemos otra cadena entre y y

[10] Subgrafo conexo maximal significa el subgrafo con mayor cantidad de vértices que mantenga la propiedad de ser conexo.

x: $\mu' = (u_q, \ldots, u_1)$, y por lo tanto tendremos que yE_Cx. Así queda demostrado que E_C es simétrica [11].

2. La expresión: Si $xE_{FC}y$ entonces $yE_{FC}x$, es trivialmente satisfecha dado que la definición de E_{FC} fuerza la simetría, porque intercambiando las variables x e y de lugar obtenemos lo mismo. Por lo tanto, E_{FC} es simétrica.

- Ambas relaciones son transitivas (se deja como ejercicio que lo demuestren).

Entonces, E_C y E_{FC} siempre son relaciones de equivalencia. Cada relación de equivalencia induce una partición sobre el conjunto [12]; así, podemos decir que sobre el conjunto de vértices tenemos dos particiones posibles. Sea $\mathcal{P}_{E_C}(X)$ la partición inducida por E_C sobre el conjunto de vértices y sea $\mathcal{P}_{E_{FC}}(X)$ la partición inducida por E_{FC} sobre el conjunto de vértices. Ahora podemos enunciar las propiedades de conexidad y conexidad fuerte de la siguiente manera:

- Un grafo G es conexo si y sólo si $\mid \mathcal{P}_{E_C}(X) \mid = 1$ o
- Un grafo G es fuertemente conexo si y sólo si $\mid \mathcal{P}_{E_{FC}}(X) \mid = 1$.

o sea, si cada una de las relaciones induce una partición sobre X en un único conjunto, o si la relación posee una única clase de equivalencia (todo X). Otra manera es usando sólo las propiedades de las relaciones:

- Un grafo G es conexo si y sólo si E_C es además completa.
- Un grafo G es fuertemente conexo si y sólo si E_{FC} es además completa.

Podemos redefinir las componentes conexas y fuertemente conexas del siguiente modo:

- Cada subgrafo de G generado por una clase de equivalencia de E_C es una componente conexa de G.
- Cada subgrafo de G generado por una clase de equivalencia de E_{FC} es una componente fuertemente conexa o bloque de G.

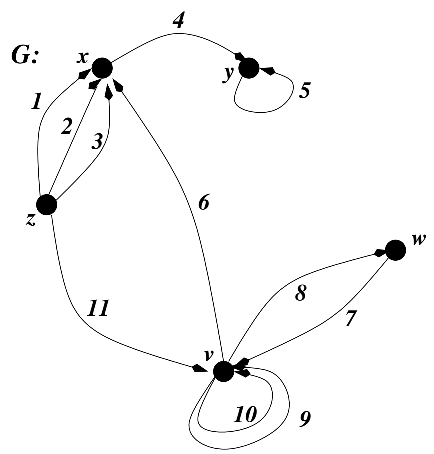
Como las componentes conexas o fuertemente conexas se pueden encontrar usando las clases de equivalencia de estas relaciones, y de acuerdo a las definiciones de partición de un conjunto y de subgrafo, podemos afirmar que:

- Cada grafo se puede descomponer en subgrafos conexos, y cada vértice debe aparecer en uno y sólo uno de dichos subgrafos.
- Cada grafo se puede descomponer en subgrafos fuertemente conexos, y cada vértice debe aparecer en uno y sólo uno de dichos subgrafos.

Ejemplo: analicemos nuevamente el grafo de la Figura 1.

[11] Recordar cómo se debe demostrar que un condicional se satisface.

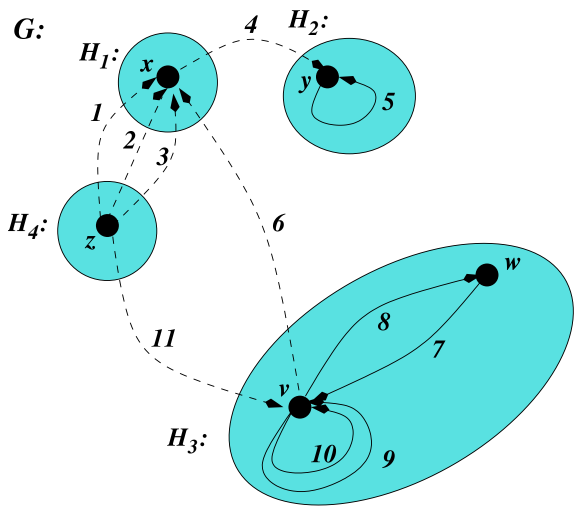
[12] Recordar que una relación de equivalencia induce una partición en clases de equivalencia sobre el conjunto en el que está definida.



G es conexo pero no fuertemente conexo, porque por ejemplo desde el vértice y no existe camino hacia el vértice w.

Por ser G conexo, existe una única componente conexa (G es subgrafo de G).

Como G no es fuertemente conexo puede "particionarse" [13] en subgrafos fuertemente conexos. Las componentes fuertemente conexas de G son los siguientes subgrafos:



H_1: consta sólo del vértice x. Es un subgrafo trivial; es el subgrafo inducido, o generado, por $\{x\}$.

H_2: consta del vértice y y del arco 5 (el subgrafo inducido por $\{y\}$).

H_3: consta de los vértices v y w y de los arcos en los que ellos participan: 7, 8, 9 y 10 (el subgrafo inducido por $\{v, w\}$).

H_4: consta sólo del vértice z (subgrafo trivial inducido por $\{z\}$).

[13] En realidad, se particiona su conjunto de vértices y cada elemento de la partición genera un subgrafo.

No pueden estar en la misma componente x y z , porque existe camino de z a x, pero no de x a z.

Los arcos 1, 2, 3, 4, 6 y 11 no aparecen en ninguna de las componentes, porque ellos conectan elementos de componentes distintas.

Queda como ejercicio verificar que esta descomposición es correcta.

□

Nota: Observar que si un grafo es fuertemente conexo entonces será conexo (porque todo camino es cadena) y si un grafo no es conexo no puede nunca ser fuertemente conexo.

Veamos ahora un ejemplo de un grafo no conexo:

Ejemplo: analicemos los siguientes grafos de las Figuras 6 y 7:

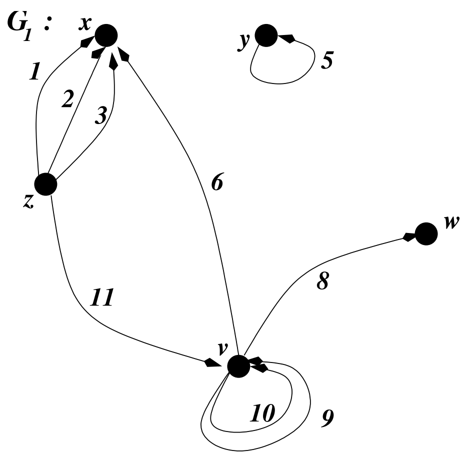


Figura 6: Ejemplo de un grafo no conexo.

El grafo G_1 de la Figura 6 claramente no es conexo, dado que por ejemplo desde los vértices x, z, v y w no existen cadenas hacia y. El vértice y es un vértice aislado y por consiguiente no conectado al resto del grafo.

Las componentes conexas de G_1 por lo tanto son 2, la del subgrafo generado por el conjunto de vértices $\{x, z, v, w\}$ y el generado por $\{y\}$.

Todos los arcos de G_1 aparecen en alguna de las componentes conexas.

Analicemos ahora el segundo ejemplo de grafo: el grafo G_2, que se muestra en Figura 7. G_2 tampoco es conexo porque, por ejemplo, desde los vértices x, y y z no existen cadenas hacia v ni w.

En G_2 no hay vértices aislados.

Las componentes conexas de G_2 son 2, la del subgrafo generado por el conjunto de vértices $\{x, z, y\}$ y la del subgrafo generado por $\{v, w\}$.

□

Nota: La conexidad se puede comprobar a simple vista, dado que los subgrafos (componentes conexas) se ven como trozos desconectados del grafo, pero la conexidad fuerte no.

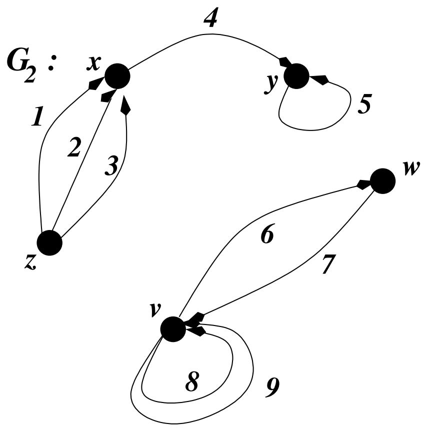


Figura 7: Otro ejemplo de grafo no conexo

Nota: Si un grafo no es conexo, cada uno de los arcos del grafo aparecerá necesariamente en una de las componentes conexas, esto no es cierto en el caso de la conexidad fuerte.

Otras Características de los Vértices

Otras características de los vértices, vinculadas con la existencia de camino son las siguientes:

Definición: Un vértice x es una *raíz* de un grafo G si existe un camino desde x a todos los vértices de X. En símbolos:

raíz de $G(x) \Leftrightarrow (\forall y \in X)$ existe un camino de x a y.

◇

Definición: Un vértice x es una *raíz del grafo inverso* de G [14] (el cual se denota con G^{-1}) si existe un camino desde todos los vértices de X a x en G. En símbolos:

raíz de $G^{-1}(x) \Leftrightarrow (\forall y \in X)$ existe un camino de y a x.

◇

Un grafo puede tener una o varias raíces o raíces del grafo inverso o ninguna.

Ejemplo:

1. En el grafo G de la Figura 1 el vértice z es raíz de G y el vértice y es raíz del grafo inverso.
2. En los grafos G_1 y G_2 del ejemplo anterior (Figura 6 y Figura 7 respectivamente) no existen raíces ni raíces del grafo inverso, en ambos casos por no ser grafos conexos.

□

[14] El grafo inverso de G es el grafo que se obtendría invirtiendo el sentido a todos los arcos de G.

Cociclos y Cocircuitos

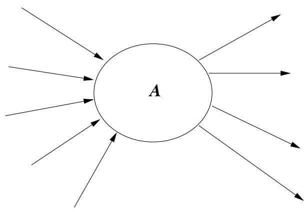
Existen conceptos duales a los de ciclo y circuito, los cuales tienen que ver con la extensión del dominio de las funciones ω, ω^+ y ω^-, a las que se les extiende su dominio a conjuntos de vértices de la siguiente manera:

$$\omega, \omega^+, \omega^- : 2^X \longmapsto 2^U.$$

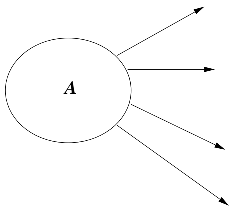
Sea $A \subseteq X$,

$$\omega(A) = \{u/u \in U \wedge \gamma(u) \in (A \times (X - A)) \cup ((X - (A) \times A)\},$$
$$\omega^+(A) = \{u/u \in U \wedge \gamma^-(u) \in A \wedge \gamma^+(u) \in (X - A)\},$$
$$\omega^-(A) = \{u/u \in U \wedge \gamma^-(u) \in (X - A) \wedge \gamma^+(u) \in A\}.$$

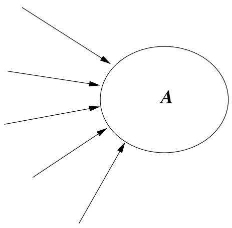
gráficamente:



$\omega(A)$ devuelve todos los arcos que salen desde vértices de A hacia el exterior de A y que proviniendo del exterior llegan a vértices de A.



$\omega^+(A)$ devuelve todos los arcos que salen desde vértices de A hacia el exterior de A.



$\omega^-(A)$ devuelve todos los arcos que proveniendo del exterior llegan a vértices de A.

Queda como ejercicio: mostrar que: $(\forall x \in X)\ \ \omega(\{x\})$ es distinto de $\omega(x)$, salvo en el caso de un grafo sin bucles.

Definición: Un *cociclo* es un conjunto no vacío de arcos de la forma de $\omega(A)$, para algún $A \subset X$. [15] $\diamond$

Un cociclo, inducido por un conjunto $A \subset X$, puede particionarse en dos conjuntos disjuntos correspondientes a $\omega^+(A)$ y $\omega^-(A)$ (como antes, $\omega(A) = \omega^+(A) \cup \omega^-(A)$).

Definición: Un *cocircuito* es un conjunto no vacío de arcos de la forma de $\omega(A)$, para algún $A \subset X$ y en el cual o todos los arcos salen desde A o todos llegan a A. En otras palabras, si es un cociclo inducido por un $A \subset X$, y tal que $\omega(A) = \omega^+(A)$ o $\omega(A) = \omega^-(A)$. $\diamond$

La definición de cocircuito tiene presente la dirección de los arcos, en cambio la de cociclo no.

[15] No se permite que $A = X$ ya que en ese caso es $\omega(A) = \varnothing$.

Un cocircuito es un caso particular de cociclo, tal que si A es el conjunto de vértices en el que se basa, o todos los arcos salen desde A o todos llegan a A.

De acuerdo a la definición de cociclo si existe un conjunto A en el cual se basa el cociclo, el mismo cociclo puede obtenerse desde el complemento de A respecto de X, o sea desde $X - A$.

Nota: Sea $A \subset X$, $\omega(A) = \omega(X - A)$, $\omega^+(A) = \omega^-(X - A)$ y $\omega^-(A) = \omega^+(X - A)$.

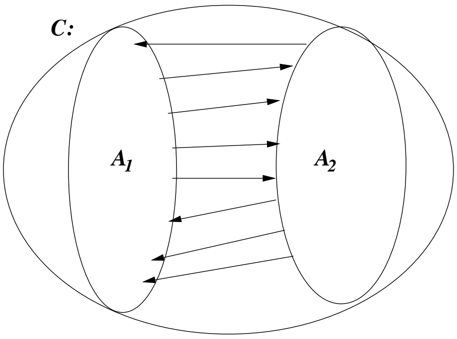
Definición: Un cociclo se denomina *elemental* si es el conjunto de arcos que une dos subgrafos conexos generados por los conjuntos A_1 y A_2 tales que:

a) $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, $A_1, A_2 \neq \varnothing$ y

b) $A_1 \cup A_2 = C$, donde C es el conjunto de vértices que genera una componente **conexa** del grafo.

◇

Se puede analizar la definición gráficamente:



Si C es el conjunto de vértices que genera una componente conexa del grafo y si al quitar los arcos del cociclo quedan dos subgrafos conexos generados por los conjuntos A_1 y A_2 (los que forman una partición de C), entonces el cociclo era elemental. En cambio, partiendo desde una componente conexa, si al sacar los arcos del cociclo quedan más de dos subgrafos conexos el cociclo no era elemental.

El concepto de elemental es también aplicable a los cocircuitos.

La característica de ser elemental tanto en ciclos, circuitos, cociclos y cocircuitos tiene que ver con que cada uno de ellos a su vez no contiene a otro ciclo, circuito, cociclo o cocircuito.

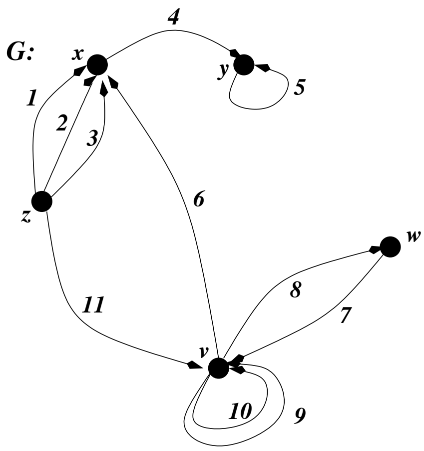
Existen muchas propiedades duales entre los ciclos y los cociclos. Por ejemplo:

- Un ciclo (cociclo) es elemental si y sólo si no contiene propiamente a otro.
- Todo ciclo (cociclo) está formado por ciclos (cociclos) elementales.
- Todo ciclo (cociclo basado en A) puede ser recorrido en dos sentidos: en sentido horario (desde A) o en sentido antihorario (desde $X - A$).

Algunas otras las veremos más adelante.

Veamos ahora un ejemplo:

Ejemplo: sea G el grafo de la Figura 1, analizaremos sobre él los nuevos conceptos:



1. $\omega(\{z,x\}) = \{11, 6, 4\}$, los arcos 1, 2 y 3 no pertenecen a este conjunto por tener tanto su origen como su destino en él.
2. $\{4\}$ es un cociclo y cocircuito elemental, basado en $\{y\}$ (o en $X - \{y\}$). Probar que es cierto (queda como ejercicio).
3. $\{4, 6, 11\}$ es un cociclo, que no es cocircuito, y que además no es elemental porque si elimino estos arcos del grafo quedan 3 componentes conexas. Por no ser elemental podemos ver que es unión de dos cociclos elementales: $\{4\}$ y $\{11, 6\}$ (éste último podría basarse en $\{v, w\}$).
4. $\{1, 2, 3, 11\}$ es un cocircuito elemental (también es cociclo) que se puede basar en $\{z\}$ (o en $X - \{z\}$), ya que todos los arcos salen desde z (o llegan a $X - \{z\}$) y si elimino esos arcos de G quedan exactamente 2 componentes conexas.
5. Cualquier conjunto de arcos conteniendo los bucles no puede ser un cociclo. ¿Por qué?
6. $\{7, 8, 11\}$ no es un cociclo, porque no puedo encontrar un conjunto de vértices tal que dichos arcos correspondan a su ω. Para que estuvieran los arcos 7 y 8 debería estar por ejemplo el vértice w, y para que estuviera el arco 11 debería aparecer por ejemplo el vértice z, pero si está z deberían estar también los arcos 1, 2 y 3; la otra manera de que apareciera el arco 11 sería tener a v, pero si él está debería aparecer también el arco 6 y no podrían aparecer los arcos 7 y 8!!

$\square$

Reconocimientos

El presente apunte se realizó tomando como base apuntes de clases del *Ing. Hugo Ryckeboer*, en la Universidad Nacional de San Luis, y los libros **Graphs** de *Claude Berge* [16] y **Graph Theory and its Applications** de *Jonathan Gross* y *Jay Yellen* [17].

[16] Graphs, de C. Berge, 3^a Ed. 1991, North Holland Mathematical Library, ISBN: 0-4448-7603-0.

[17] Graph Theory and its Applications, de J. Gross y J. Yellen, 2^{da} Impresión 1999, CRC Press, ISBN: 0-8493-3982-0.