Teoría de Grafos: Segunda Parte

Año 2024

Representación Vectorial de Ciclos

Ya hemos visto algunos conceptos y definiciones de las Teorías de Grafos y Digrafos. Ahora continuaremos estudiando otros conceptos y profundizando algunos de los conceptos ya vistos.

Previamente, definimos un ciclo μ como una cadena simple y cerrada, y lo representábamos como una secuencia de arcos. Un ciclo era elemental si no pasaba por un vértice más de una vez (salvo, desde luego, los vértices inicial y final que son coincidentes).

En el ciclo hay arcos que se toman en el sentido que ellos poseen y otros que se toman en sentido contrario, lo cual depende del sentido de recorrido del ciclo.

Terminología: denotamos con μ^+ al conjunto de todos los arcos de μ que están en el sentido en que se recorre el ciclo y denotamos con μ^- al conjunto de todos los otros arcos de μ.

Si los arcos de G se enumeran con $1, 2, \ldots, m$ (siendo $|U| = m$), cualquier ciclo μ puede representarse como un vector de m posiciones:

$$\overline{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m),$$

en donde:

$$\mu_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \notin \mu^+ \cup \mu^- \\ -1 & \text{si} \quad i \in \mu^- \\ 1 & \text{si} \quad i \in \mu^+ \end{cases}$$

Claramente, un ciclo posee una única representación vectorial; pero, un vector puede representar a varios ciclos, tal que todos ellos utilizan los mismos arcos en el mismo sentido pero que se diferencian por el vértice en el que se inicia y termina el ciclo.

Ejemplo: Sea el grafo G de Figura 1 (del apunte anterior):

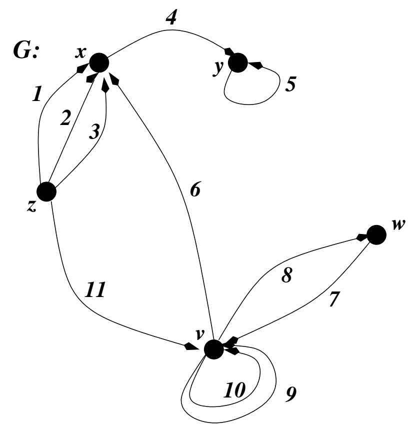


Figura 1: Ejemplo de grafo dirigido.

La cadena $\mu = (1, 6, 11)$ es cerrada y simple, entonces es un ciclo. Más aún, es un ciclo elemental. La representación vectorial para μ es:

$$\overline{\mu} = (1, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, -1)$$

pero, este vector también representa a los ciclos $\mu' = (11, 1, 6)$ y $\mu'' = (6, 11, 1)$. Estos ciclos tienen en común los arcos utilizados, el sentido de recorrido (el sentido en el que toman los arcos) y los vértices por los que pasan (en este caso: z, x y v).

Si armamos un nuevo ciclo usando los arcos de μ en sentido inverso, o sea $(11, 6, 1)$ tendríamos la siguiente representación vectorial:

$$(-1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1)$$

□

Todo ciclo por ser una cadena cerrada se puede ver como que empieza y termina en cualquiera de los vértices por los que pasa esta cadena.

Un ciclo $\mu = (u_1, u_2, \ldots, u_q)$ tendrá la misma representación vectorial que todos aquellos ciclos que se obtienen al "rotar" los elementos de la secuencia haciendo $(u_2, \ldots, u_q, u_1)$, $(u_3, \ldots, u_q, u_1, u_2)$, $\ldots$,$(u_q, u_1, u_2, \ldots, u_{q-1})$. O sea, que un vector conteniendo q componentes no nulas representa a q ciclos distintos (desde el punto de vista de la secuencia de arcos), pero similares (desde el punto de vista de los arcos que utilizan, los vértices por los que pasan y el sentido de recorrido).

Algunos autores denominan ciclo a la clase de equivalencia de todas las cadenas cerradas simples que pueden obtenerse a partir de una secuencia de arcos por permutación circular o rotación de los mismos (en ese caso, un ciclo es generado por un conjunto de cadenas cerradas). Esta distinción es útil en problemas de recuento o enumeración.

Lo mismo puede aplicarse a circuitos.

Teniendo en cuenta la representación vectorial, un ciclo representa la clase de equivalencia de las cadenas cerradas simples tales que tienen igual representación vectorial.

En general trabajaremos con grafos sin bucles.

Dado un ciclo $\mu = (u_1, u_2, \ldots, u_q)$, denotamos con μ^{-1} a la secuencia de arcos obtenida invirtiendo la secuencia de μ, o sea $\mu^{-1} = (u_q, \ldots, u_2, u_1)$, la cual es un nuevo ciclo. Este nuevo ciclo usa los mismos arcos de μ y pasa por los mismos vértices, pero el recorrido es el inverso. Entonces, si la representación vectorial de μ es $\overline{\mu}$, la representación vectorial de $\overline{\mu^{-1}}$ se podría obtener como: $\overline{\mu^{-1}} = (-1) \cdot \overline{\mu}$, lo cuál invertiría de signo cada una de las componentes[1] del vector $\overline{\mu}$. Además, $\mu^+ = (\mu^{-1})^-$ y $\mu^- = (\mu^{-1})^+$.

Recordar que:

a) Un vector $\overline{v}$ es una *combinación lineal* de los vectores $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_k}$ si se cumple que $\overline{v} = a_1 \cdot \overline{v_1} + a_2 \cdot \overline{v_2} + \ldots + a_k \cdot \overline{v_k}$, para escalares a_i de un campo [a].

b) Los vectores $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_k}$ son *linealmente independientes* si ninguno de ellos se puede obtener como una combinación lineal de los restantes.

[a] Sobre el campo en el que está definido el espacio vectorial.

En otras palabras, un conjunto de k vectores es linealmente independiente si y sólo si, la única manera de tener $a_1 \cdot \overline{v_1} + a_2 \cdot \overline{v_2} + \ldots + a_k \cdot \overline{v_k} = 0$ es que todos los a_i sean 0. En caso contrario, significa que aquellos vectores $\overline{v_i}$, cuyo coeficiente a_i sea distinto de cero, se pueden obtener como una

[1] Recordar cómo se realizaba el producto de un escalar por un vector: si el vector es $\overline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ y el escalar es a, entonces el producto del escalar por el vector es $a \cdot \overline{v} = (a \cdot v_1, a \cdot v_2, \ldots, a \cdot v_k)$.

combinación lineal de los demás es decir: $\overline{v_i} = b_1 \cdot \overline{v_1} + \ldots + b_{i-1} \cdot \overline{v_{i-1}} + b_{i+1} \cdot \overline{v_{i+1}} + \ldots + b_k \cdot \overline{v_k}$, donde $b_j = \dfrac{a_j}{-a_i} \forall j \neq i$, y tal que b_j sea un escalar del campo correspondiente.

Ejemplo: el vector $(1, 0, 1)$ es una combinación lineal de los vectores $(1, -1, 0)$ y $(0, 1, 1)$, dada por:

$$(1, 0, 1) = 1 \cdot (1, -1, 0) + 1 \cdot (0, 1, 1).$$

Esta última ecuación también implica que $(1, 0, 1)$ es una combinación lineal de cualquier superconjunto de $\{(1, -1, 0), (0, 1, 1)\}$, donde los multiplicadores escalares para los demás vectores en el superconjunto serán 0.

Es fácil verificar que el conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.

$\square$

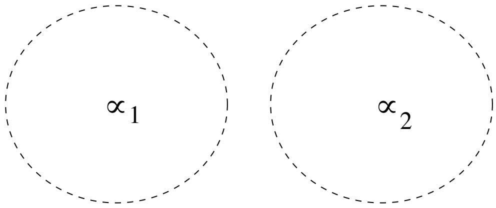
Como hemos observado que $\overline{\mu^{-1}}$ se puede obtener a partir de $\overline{\mu}$ decimos, desde el punto de vista vectorial, que dichos vectores no son linealmente independientes, ya que uno se obtiene como combinación lineal del otro.

Nota: de aquí en más usaremos un ciclo y el vector que lo representa indistintamente.

Ahora podemos analizar qué significaría hacer operaciones con los vectores y por consiguiente con los ciclos.

Sean $\overline{\mu_1}$ y $\overline{\mu_2}$ los vectores de dos ciclos μ_1 y μ_2, al hacer $\overline{\mu} = \overline{\mu_1} + \overline{\mu_2}$ obtenemos un nuevo vector $\overline{\mu}$ cuyas componentes corresponden a la suma de las correspondientes componentes de $\overline{\mu_1}$ y $\overline{\mu_2}$. Analicemos los distintos casos, observando el resultado que se obtendría:

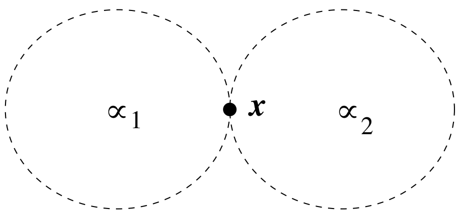
a) Si $\overline{\mu_1}$ y $\overline{\mu_2}$ fuesen ciclos totalmente disjuntos (no tienen ni arcos ni vértices comunes) entonces el vector $\overline{\mu}$ **no representará** un nuevo ciclo.



En este caso se obtendrá un nuevo vector que no representará un nuevo ciclo, porque en particular el vector no representará una cadena.

b) Si $\overline{\mu_1}$ y $\overline{\mu_2}$ no fuesen disjuntos (o tienen arcos o vértices comunes) puede ser que:

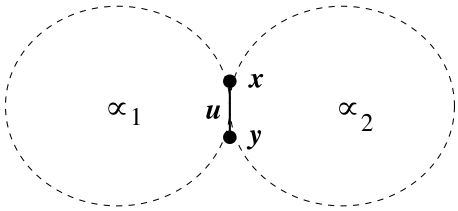
i) Si tienen sólo un vértice en común x:



En este caso, se obtiene un nuevo ciclo. Por ejemplo, partiendo desde el vértice inicial de μ_1 al llegar a x continúa por los arcos de μ_2 (en el sentido de su recorrido) hasta volver a x y luego vuelve al vértice inicial usando los arcos de μ_1 (casi como "si se dibujara un ocho"). Claramente el nuevo ciclo será no elemental.

ii) Si tienen sólo un arco en común:

En este caso, sea u el arco común. Los extremos de u también serán vértices comunes a ambos ciclos. Si el arco u se tomaba en sentidos opuestos en ambos ciclos (uno lo tomaba en el sentido correcto y el otro en el opuesto o viceversa), entonces la componente correspondiente del vector se anulará al hacer la suma y se obtendrá un nuevo ciclo.



Si por el contrario ambos ciclos lo tomaban de la misma manera (o los dos en sentido correcto o los dos en sentido contrario) aparecerá esta componente con un valor 2 o -2 y no representaría una cadena simple, y por consiguiente no sería un ciclo, sino un pseudociclo (se puede descomponer como suma de ciclos).

Desde el punto de vista de los vectores tenemos las siguientes propiedades sobre ciclos:

Propiedad 1:

Un ciclo es la suma de ciclos elementales que son disjuntos de a pares, en cuanto a arcos. $\diamond$

Esto es evidente debido a que, a medida que atravesamos el ciclo, podemos definir un ciclo elemental μ cada vez que volvemos a un vértice ya visitado.

Propiedad 2:

Un ciclo es elemental si y sólo si es un ciclo minimal, es decir ningún otro ciclo está completamente contenido en él. $\diamond$

La demostración queda como ejercicio.

Representación Vectorial de Cociclos

Ya hemos visto que los cociclos son conjuntos no vacíos de arcos de la forma $\omega(A)$ (con $A \subset X$), el cual puede ser particionado en dos subconjuntos $\omega^+(A)$ y $\omega^-(A)$. Tal como lo hicimos con los ciclos podemos representar los cociclos mediante vectores de m componentes ($|U| = m$), donde cada componente indica la situación de dicho arco en el cociclo. Para cada cociclo ω existe un vector $\overline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$, en donde:

$$\omega_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \notin \omega(A) \\ -1 & \text{si} \quad i \in \omega^-(A) \\ 1 & \text{si} \quad i \in \omega^+(A) \end{cases}$$

Un cociclo ω puede definirse de esta manera por su vector $\overline{\omega}$. Así tenemos:

Propiedad 3:

Un cociclo es la suma de cociclos elementales que son disjuntos de a pares, en cuanto a arcos. $\diamond$

Sea ω un cociclo de la forma $\omega(A)$, y sean $A_1, A_2, \ldots, A_k$ las diferentes componentes conectadas del subgrafo generado por A. Entonces:

$$\omega(A) = \omega(A_1) + \omega(A_2) + \ldots + \omega(A_k),$$

y los cociclos $\omega(A_1)$, $\omega(A_2)$, $\ldots$, $\omega(A_k)$ son disjuntos de a pares.

Propiedad 4:

Un cociclo es elemental si y sólo si es un cociclo minimal, es decir ningún otro cociclo está completamente contenido en él. $\diamond$

Además, recordando que $\omega(A) = \omega(X - A)$, podemos ver que $\overline{\omega}_A = -1 \cdot \overline{\omega}_{X-A}$, y por consiguiente no son independientes entre sí como vectores, y son distintos aunque ambos representan el mismo cociclo.

Bases del Espacio de Ciclos y del Espacio de Cociclos

En general podemos decir que los ciclos $\overline{\mu_1}, \overline{\mu_2}, \ldots, \overline{\mu_k}$ (cociclos $\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}, \ldots, \overline{\omega_k}$) son *dependientes* si existe una ecuación vectorial de la forma:

$$r_1 \cdot \overline{\mu_1} + r_2 \cdot \overline{\mu_2} + \ldots + r_k \cdot \overline{\mu_k} = 0 \qquad (r_1 \cdot \overline{\omega_1} + r_2 \cdot \overline{\omega_2} + \ldots + r_k \cdot \overline{\omega_k} = 0)$$

donde $r_1, r_2, \ldots, r_k$ son números reales, no todos nulos. Si los ciclos (cociclos) no son dependientes, se dice que ellos son *independientes*.

No a cualquier ciclo (cociclo) lo podemos obtener como combinación lineal de otros ciclos (cociclos).

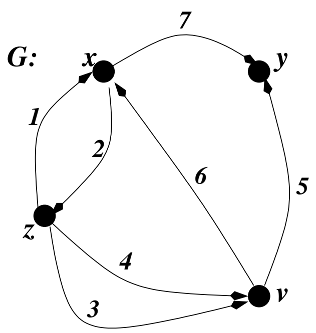
Una *base de ciclos* está definida como un conjunto $\{\overline{\mu_1}, \overline{\mu_2}, \ldots, \overline{\mu_k}\}$ de ciclos elementales independientes tal que cualquier ciclo $\overline{\mu}$ puede ser escrito como:

$$\overline{\mu} = r_1 \cdot \overline{\mu_1} + r_2 \cdot \overline{\mu_2} + \ldots + r_k \cdot \overline{\mu_k},$$

donde $r_1, r_2, \ldots, r_k$ son números reales [2]. Claramente, k es igual a la *dimensión* del subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por los ciclos ($|U| = m$) y por lo tanto no depende sobre la elección de los vectores particulares de la base. Esta constante k denota, por lo tanto, el número de ciclos independientes de un grafo G y es llamada el *número ciclomático de* G y lo denotaremos con $\mu(G)$.

Una *base de cociclos* $\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}, \ldots, \overline{\omega_l}$ se define similarmente, y su cardinalidad l es llamada el *número cociclomático de* G (cantidad de cociclos independientes, que es la *dimensión* del subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por los cociclos) y lo denotaremos con $\lambda(G)$.

Ejemplo: Sea el siguiente grafo, algunos de sus ciclos elementales son:



$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\mu_1 & = & (1,6,4), & \overline{\mu_1} & = & (1,0,0,-1,0,-1,0),\\
\mu_2 & = & (1,2), & \overline{\mu_2} & = & (1,1,0,0,0,0,0),\\
\mu_3 & = & (2,6,4), & \overline{\mu_3} & = & (0,-1,0,-1,0,-1,0),\\
\mu_4 & = & (1,6,3), & \overline{\mu_4} & = & (1,0,-1,0,0,-1,0),\\
\mu_5 & = & (2,6,3), & \overline{\mu_5} & = & (0,-1,-1,0,0,-1,0),\\
\mu_6 & = & (1,7,5,4), & \overline{\mu_6} & = & (1,0,0,-1,1,0,1),\\
\mu_7 & = & (3,4), & \overline{\mu_7} & = & (0,0,1,-1,0,0,0),\\
\mu_8 & = & (7,5,6), & \overline{\mu_8} & = & (0,0,0,0,1,1,1).
\end{array}$$

Estos ciclos no son todos independientes, ya que por ejemplo:

$$\overline{\mu_2} - \overline{\mu_1} - \overline{\mu_3} = 0.$$

[2]En realidad, no es un espacio vectorial sino un módulo, porque las componentes son elementos de $\mathbb{Z}$, y $\mathbb{Z}$ no forma un cuerpo sino un anillo; pero, mientras no se utilice la división, ambos tipos de estructuras son semejantes.

Los ciclos $\{\overline{\mu_1}, \overline{\mu_2}, \overline{\mu_4}, \overline{\mu_6}\}$ formarían una base del espacio de ciclos, y por lo tanto $\mu(G) = 4$.

Algunos de los cociclos elementales de G son:

$$\begin{array}{lllllll}
\omega_1 & = & \{1,2,3,4\}, & \overline{\omega_1} & = & (1,-1,1,1,0,0,0) & \text{basado en } \{z\}. \\
\omega_2 & = & \{1,2,6,7\}, & \overline{\omega_2} & = & (-1,1,0,0,0,-1,1) & \text{basado en } \{x\}. \\
\omega_3 & = & \{1,2,5,6\}, & \overline{\omega_3} & = & (1,-1,0,0,-1,1,0) & \text{basado en } \{z,v\}. \\
\omega_4 & = & \{3,4,6,7\}, & \overline{\omega_4} & = & (0,0,-1,-1,0,1,-1) & \text{basado en } \{y,v\}. \\
\omega_5 & = & \{3,4,5,6\}, & \overline{\omega_5} & = & (0,0,-1,-1,-1,1,0) & \text{basado en } \{v\}. \\
\omega_6 & = & \{3,4,6,7\}, & \overline{\omega_6} & = & (0,0,1,1,0,-1,1) & \text{basado en } \{z,x\}. \\
\omega_7 & = & \{5,7\}, & \overline{\omega_7} & = & (0,0,0,0,-1,0,1) & \text{basado en } \{z,x,v\}.
\end{array}$$

Estos cociclos no son todos independientes, ya que por ejemplo:

$$\overline{\omega_1} + \overline{\omega_2} + \overline{\omega_4} = 0.$$

Los cociclos $\{\overline{\omega_1}, \overline{\omega_3}, \overline{\omega_7}\}$ forman una posible base del espacio de cociclos, y por lo tanto $\lambda(G) = 3$.

□

Los ciclos (cociclos) que forman la base no pueden ser obtenidos como combinación lineal de otros.

Cada una de estas bases genera un subespacio sobre $\mathbb{R}^m$. Pero, ¿existe algún tipo de relación entre ellos? La repuesta es sí, y la misma la analizamos a continuación.

Sean $\overline{\mu}$ un ciclo y $\overline{\omega}$ un cociclo cualesquiera en un grafo G, existe una operación definida entre vectores denominada *producto vectorial*. Veamos entonces, qué obtenemos al multiplicar estos vectores:

$$\langle \overline{\mu}, \overline{\omega} \rangle = \mu_1 \cdot \omega_1 + \mu_2 \cdot \omega_2 + \ldots + \mu_m \cdot \omega_m$$

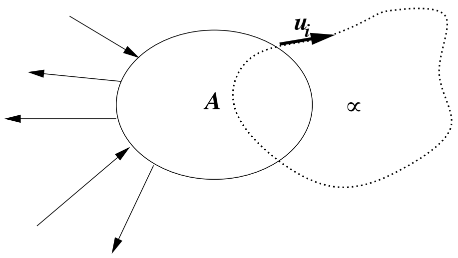
1. Claramente en las componentes correspondientes a aquellos arcos que no participan en el ciclo o en el cociclo tendremos que, por ser 0 uno de los valores, el resultado de la multiplicación será también 0. En símbolos si $\mu_i = 0$ o $\omega_i = 0$, tendremos que $\mu_i \cdot \omega_i = 0$.

2. En las componentes correspondientes a arcos que participan en ambos, tanto en el ciclo como en el cociclo, debemos analizar cuidadosamente qué resultado obtenemos.

   Supongamos que el cociclo se basa en un conjunto de vértices A [3], cuando el ciclo usa un arco que pertenece al cociclo pueden presentarse los siguientes casos:

   a) Supongamos que el arco en común es un arco que sale desde A hacia el exterior.
   Si u_i es un arco que sale desde A, entonces la componente i–ésima del vector del cociclo tendrá un valor 1.

[3] Los arcos que vinculan vértices de A y aparecen en el ciclo, no aparecerán en el cociclo.



i) Si a dicho arco el ciclo lo usa para entrar a los vértices de A, entonces su componente i–ésima tendrá un valor -1, por tomarlo en el sentido contrario.

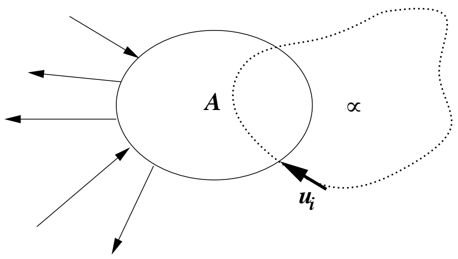
ii) Si a dicho arco el ciclo lo usa para salir desde los vértices de A hacia el exterior, entonces la componente i–ésima del ciclo tendrá un valor 1.

En estos casos tendríamos los siguientes resultados del producto escalar de componentes:

i) $\mu_i \cdot \omega_i = -1$ **ii)** $\mu_i \cdot \omega_i = 1$.

b) Supongamos que el arco en común es un arco que entra desde el exterior hacia A.

Si u_i es un arco que entra hacia los vértices de A, entonces la componente i–ésima del vector del cociclo tendrá un valor -1.



i) Si a dicho arco lo usa el ciclo para entrar a los vértices de A, entonces su componente i–ésima tendrá un valor 1, por tomarlo en el sentido correcto.

ii) Si a dicho arco lo usa el ciclo para salir desde los vértices de A hacia el exterior, entonces la componente i–ésima del ciclo tendrá un valor -1.

En estos casos tendríamos los siguientes resultados del producto escalar de componentes:

i) $\mu_i \cdot \omega_i = -1$ **ii)** $\mu_i \cdot \omega_i = 1$.

Por ser el ciclo una cadena cerrada, habrá tantos casos en que se entre a vértices de A como casos que se salga desde vértices de A. Por consiguiente, en esta suma habrán tantos términos que den como resultado -1 como términos que den 1 y así se anularán mutuamente.

Por lo tanto, como resultado final del producto escalar tenemos que:

$$\langle \overline{\mu}, \overline{\omega} \rangle = 0$$

lo cual significa que el espacio de ciclos y el espacio de cociclos son *ortogonales* entre sí.

Por ser ambos espacios ortogonales entre sí, y ambos ser subespacios de $\mathbb{R}^m$, podemos afirmar que:

$$dim(\text{Esp. ciclos}) + dim(\text{Esp. cociclos}) \leq m$$

o lo que es lo mismo:

$$\mu(G) + \lambda(G) \leq m \tag{1}$$

Con esta desigualdad tenemos una primera aproximación a cuánto serán en un grafo las cantidades $\mu(G)$ y $\lambda(G)$.

Número Ciclomático y Cociclomático de un Grafo

Ahora analizaremos constructivamente cuánto valdrán estos números para un grafo particular. Para ello supongamos que G es un grafo que tiene $|X| = n$ vértices, $|U| = m$ arcos y c componentes conexas.

<u>Número ciclomático:</u>

Para obtener cuánto es el número ciclomático analizaremos en secuencia grafos parciales de G:

$$G_0, G_1, G_2, \ldots, G_m$$

donde G_i tiene i arcos, y su conjunto de arcos se obtiene a partir del de G_{i-1} agregándole un nuevo arco, desde $U - U_{i-1}$. Por consiguiente, los conjuntos de arcos correspondientes a los grafos parciales de la secuencia anterior es una secuencia incrementante:

$$U_0 = \varnothing \subset U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_m = U.$$

si denotamos con $c(G_i)$ a la cantidad de componentes conexas y con $\mu(G_i)$ a la cantidad de ciclos independientes del grafo G_i, tendremos la siguiente información:

	G_0	G_1	G_2	$\ldots$	G_i	G_{i+1}	$\ldots$	G_m
cant. de arcos ($\lvert U_i\rvert$)	0	1	2	$\ldots$	i	$i+1$	$\ldots$	m
cant. de componentes conexas ($c(G_i)$)	n	$n-1$	$c(G_2)$	$\ldots$	$c(G_i)$	$c(G_{i+1})$	$\ldots$	c
cant. de ciclos ($\mu(G_i)$)	0	0	$\mu(G_2)$	$\ldots$	$\mu(G_i)$	$\mu(G_{i+1})$	$\ldots$	$\mu(G)$

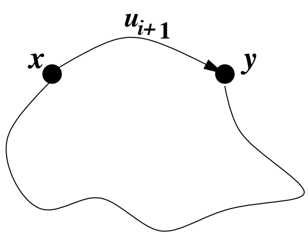
G_0 es un grafo parcial trivial, no hay arcos, y por consiguiente tiene n componentes conexas y no tiene arcos. Al pasar a G_1 se agrega un arco, el cual hará que haya una componente conexa menos; pero, con sólo un arco, no puede haber un ciclo. De ahí en más no es tan claro qué cambios produce el agregar un arco sobre las cantidades de componentes conexas y ciclos. Por ejemplo, al agregar el segundo arco puede ocurrir que:

1. dicho arco tenga como extremos los mismos vértices que ya estaban conectados por el primer arco, en cuyo caso aparece un ciclo y la cantidad de componentes conexas no cambia (sigue siendo $n-1$). En caso contrario,

2. que el arco vincule extremos que en G_1 se encontraban en componentes conexas distintas, en cuyo caso decrece el número de componentes a $n-2$ y el número de ciclos sigue siendo 0.

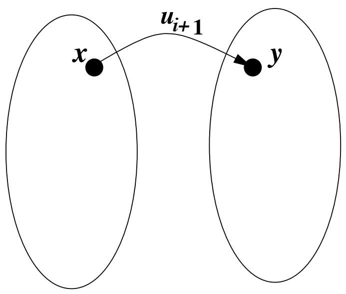
En general la situación es la siguiente, supongamos que conocemos para el grafo G_i la cantidad de componentes conexas ($c(G_i)$) y la cantidad de ciclos ($\mu(Gi)$) y ahora se agrega un nuevo arco para pasar a G_{i+1}. Este nuevo arco, que previamente no había aparecido en ninguno de los grafos parciales anteriores, puede provocar las siguientes situaciones:

1. que dicho arco u_{i+1} tenga como extremos a vértices que ya estaban conectados en G_i,



en cuyo caso aparece un ciclo nuevo, o sea que $\mu(G_{i+1})$ será igual a $\mu(G_i) + 1$, y la cantidad de componentes conexas no cambia ($c(G_{i+1}) = c(Gi)$), o

2. que el arco vincule vértices que en G_i se encontraban en componentes conexas distintas,



en cuyo caso no puede aparecer un ciclo nuevo, o sea que $\mu(G_{i+1}) = \mu(G_i)$, pero, la cantidad de componentes conexas sí cambia, ya que se combinan dos componentes para formar ahora una sola, y así $c(G_{i+1}) = c(G_i) - 1$.

Aunque no podemos decir claramente que ocurre con una de esas cantidades al pasar de G_i a G_{i+1}, podemos observar que hay una relación que en los dos casos planteados se mantiene, la cual es que si hacemos la diferencia entre cantidad de ciclos y cantidad de componentes conexas en el grafo G_i y vemos que ocurre con esa diferencia en el grafo G_{i+1}, podemos establecer que:

$$\mu(G_{i+1}) - c(G_{i+1}) = (\mu(G_i) - c(G_i)) + 1.$$

Lo cual dice que cada vez que pasamos de un grafo parcial al siguiente en la secuencia aumentamos en una unidad la diferencia, y como al ir desde G_0 hasta G_m como agregamos m arcos tendremos que:

$$\mu(G_m) - c(G_m) = (\mu(G_0) - c(G_0)) + m,$$

pero, $\mu(G_m) = \mu(G)$, $c(G_m) = c$, $\mu(G_0) = 0$ y $c(G_0) = n$, entonces reemplazando en la fórmula anterior:

$$\mu(G) - c = 0 - n + m$$

y despejando conseguimos:

$$\mu(G) = m - n + c. \tag{2}$$

Por lo tanto, hay $m - n + c$ ciclos linealmente independientes en el grafo G. La independencia de estos ciclos está asegurada debido a que contamos un nuevo ciclo al aparecer un nuevo arco que no estaba en ninguno de los ciclos encontrados previamente, es decir que cada ciclo contiene un arco que ninguno de los otros ciclos.

<u>Número cociclomático:</u>

Como el grafo considerado tiene c componentes conexas, existen c subconjuntos de vértices, $A_1, \ldots, A_c$, los cuales forman una partición de X, y desde los cuales se pueden generar las componentes conexas de G (como los subgrafos de G generados por $A_1, \ldots, A_c$). Si cada A_i tiene n_i vértices, entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{c} n_i = n$.

Supongamos que trabajamos sobre la i–ésima componente conexa, o sea sobre A_i. Trataremos de formar cociclos independientes en dicha componente de la siguiente manera:

1. Tomamos un vértice arbitrario a_1 de A_i, nuestro primer cociclo será $\omega(\{a_1\})$, el cual contiene un cociclo elemental. Sea u_1 un arco que pertenece a este cociclo elemental, por ello este arco tiene un extremo que es a_1 y al otro extremo llamémoslo a_2.

2. Ahora nuestro segundo cociclo será $\omega(\{a_1, a_2\})$, el cual contiene un cociclo elemental. Sea ahora u_2 un arco de este cociclo elemental, u_2 tiene un extremo en $\{a_1, a_2\}$ y el otro extremo fuera, llamemos a_3 al extremo que no está en $\{a_1, a_2\}$.

3. Tomamos ahora $\{a_1, a_2, a_3\}$ y nuestro cociclo $\omega(\{a_1, a_2, a_3\})$, el cual contiene un cociclo elemental, y continuamos este proceso hasta que el conjunto contenga $n_i - 1$ vértices [4].

De esta manera tendremos definidos $n_i - 1$ cociclos elementales independientes [5] en la componente basada en A_i. Si repetimos este proceso en cada una de las componentes conexas del grafo obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{c}(n_i - 1) = \sum_{i=1}^{c} n_i - \sum_{i=1}^{c} 1 = n - c$$

Por consiguiente hemos conseguido una cota inferior para $\lambda(G)$, ya que podrían existir más cociclos elementales independientes, pero por lo menos sabemos cómo obtener $n - c$ de ellos. Así,

$$\lambda(G) \geq n - c. \tag{3}$$

De (2) y (3) tenemos que:

$$\mu(G) + \lambda(G) \geq (m - n + c) + (n - c) = m$$

o sea que:

$$\mu(G) + \lambda(G) \geq m. \tag{4}$$

Pero, analizando (1) y 4) deducimos que:

$$\mu(G) + \lambda(G) = m. \tag{5}$$

Finalmente entonces podemos decir que:

$$\lambda(G) = n - c, \tag{6}$$

o sea, que de la manera en que obtuvimos los cociclos elementales independientes obtuvimos tantos como era posible.

Árboles y Arborescencias

Ahora vamos a ver un tipo particular de grafo, que es muy común y del cual seguramente han visto algo antes.

Definición: Un *árbol* se define como un grafo conexo y sin ciclos. ◇

Un árbol es una clase especial de 1-grafo [6].

[4] Si agregara un vértice más al conjunto obtendría todo A_i, y al hacer $\omega(A_i)$ tendríamos un conjunto vacío de arcos, que por definición no será un cociclo.

[5] Estos cociclos son independientes debido a que cada uno contiene un arco que no está contenido en ninguno de los cociclos restantes.

[6] Dado que si existieran aristas paralelas claramente habrá ciclos en el grafo.

Definición: Una *foresta* se define como un grafo cuyas componentes conexas son árboles, o lo que es lo mismo es un grafo sin ciclos. ◇

Claramente el concepto de árbol se aplica a grafos, dado que los conceptos de conexidad y ciclo son propios de los grafos. Pero, como ya hemos dicho en otros casos, si son conceptos de grafos pueden también aplicarse a los digrafos.

Existen además otras maneras de caracterizar completamente a un árbol las cuales enuncia el siguiente teorema.

Teorema: Sea $G = \langle X, U, \gamma \rangle$ un digrafo de orden n (con $n > 2$). Las siguientes propiedades son equivalentes y cada una caracteriza completamente a un *árbol*:

(1) *G es conexo y sin ciclos.*

(2) *G tiene $n-1$ arcos y no tiene ciclos.*

(3) *G es conexo y tiene exactamente $n-1$ arcos.*

(4) *G no tiene ciclos, y si se le agrega un arco se crea exactamente un ciclo.*

(5) *G es conexo, y si se saca un arco deja de serlo.*

(6) *Todo par de vértices de G está conectado por una y sólo una cadena.*

◇

Es claro que todas estas propiedades no tienen en cuenta el sentido de los arcos.

Para analizar la equivalencia entre ellas al menos se debe demostrar que:

Si $(1) \Rightarrow (2)$, *Si* $(2) \Rightarrow (3)$, *Si* $(3) \Rightarrow (4)$, *Si* $(4) \Rightarrow (5)$, *Si* $(5) \Rightarrow (6)$, *Si* $(6) \Rightarrow (1)$.

Esto es así porque la equivalencia es transitiva, y la implicación también. Por ello, no es necesario demostrar por ejemplo: *Si* $(2) \Rightarrow (1)$, porque tendríamos demostrado.

> *Si* $(2) \Rightarrow (3)$ y *Si* $(3) \Rightarrow (4)$ y *Si* $(4) \Rightarrow (5)$ y *Si* $(5) \Rightarrow (6)$ y *Si* $(6) \Rightarrow (1)$, y de aquí deducimos por la transitividad que *Si* $(2) \Rightarrow (1)$, con lo cual queda demostrada la equivalencia entre (1) y (2).

Veamos cómo serían estas demostraciones:

Demostraciones:

a) *Si* $(1) \Rightarrow (2)$

Si G es conexo $\Rightarrow c = 1$.

Si G es sin ciclos $\Rightarrow \mu(G) = 0$.

Entonces debo demostrar que G es sin ciclos y tiene $n-1$ arcos (o sea $|U| = m = n-1$).

Así,

$$\mu(G) = m - n + c,$$

y reemplazando c y sabiendo que $\mu(G) = 0$, tendremos que:

$$\mu(G) = m - n + 1 = 0,$$

despejando entonces,

$$m = n - 1.$$

c.q.d. $\square$

b) *Si* $(2) \Rightarrow (3)$

Si G es sin ciclos $\Rightarrow \mu(G) = 0$ y $m = n - 1$.

Entonces debemos mostrar que G es conexo y tiene $m = n - 1$.

Pero, sabiendo que G es sin ciclos y usando la definición de $\mu(G)$ tendremos que:

$$\mu(G) = m - n + c = 0,$$

y reemplazando m en la fórmula tenemos:

$$\mu(G) = n - 1 - n + c = 0,$$

ahora cancelando las n y despejando c llegamos a que:

$$c = 1 \text{ y por consiguiente } G \text{ es conexo.}$$

c.q.d. $\square$

c) *Si* $(3) \Rightarrow (4)$

Si G es conexo $\Rightarrow c = 1$.

G tiene $n - 1$ arcos.

Debemos mostrar que G es sin ciclos y si agregamos un arco deja de serlo. Veamos primero si G es sin ciclos, para ello utilizamos la fórmula para el número ciclomático:

$$\mu(G) = m - n + c,$$

y reemplazando m y c en la fórmula tenemos:

$$\mu(G) = n - 1 - n + 1 = 0,$$

y por consiguiente G es sin ciclos. Ahora debemos ver la segunda parte, o sea que si agregamos un arco creamos un ciclo. Si agregamos un arco será $m = n - 1 + 1 = n$, y reemplazando nuevamente en la fórmula de $\mu(G)$:

$$\mu(G) = m - n + c = n - n + 1 = 1$$

y como $\mu(G) = 1$, vemos que debido a este nuevo arco se creó un ciclo.

c.q.d. $\square$

d) *Si* $(4) \Rightarrow (5)$

Para demostrar esta implicación vamos a usar el método del absurdo, es decir suponemos que lo enunciado por **(4)** es cierto y que **(5)** no lo es.

Como **(5)** es una conjunción de dos afirmaciones, para que sea falsa basta con que una de estas dos afirmaciones lo sea, así veremos cada una de ellas por separado:

1^a **parte:** Si G no es conexo, entonces $c \geq 2$, y por lo tanto podría agregar un arco que una a vértices de dos componentes distintas (no conexas previamente) y no crearía un ciclo, lo cual niega la hipótesis de que si agrego un arco deja de ser sin ciclos. **¡Absurdo!**

Así, podemos asegurar que si es verdadero que "*G no tiene ciclos y si agrego un arco deja de serlo*" no puede ser falso que "*G es conexo*".

2^a **parte:** Entonces, G es conexo y supongo que puedo encontrar un arco que no lo desconecte, ello significaría que los extremos de dicho arco están conectados por una cadena que no utiliza ese arco, y por lo tanto esa cadena más ese arco hubieran formado un ciclo, entonces G no era sin ciclos. **¡Absurdo!**

Finalmente de 1. y 2. podemos asegurar que si es verdadero que "*G no tiene ciclos y si agrego un arco deja de serlo*" no puede ser falso que "*G es conexo y si se saca un arco deja de serlo*".

c.q.d. $\square$

e) *Si* $(5) \Rightarrow (6)$

Demostraremos esta implicación también por el absurdo y dividiendo también en dos partes la demostración. Una suponiendo que no hay ninguna cadena entre dos vértices, y la otra suponiendo que hay más de una (esto porque hay que negar que hay una y sólo una).

1^a **parte:** Supongamos que encontramos dos vértices no unidos por ninguna cadena, esto implica que no es conexo, lo cual niega una parte de la hipótesis. **¡Absurdo!**

2^a **parte:** Ahora supongamos que encontramos dos puntos unidos por más de una cadena. Para considerarlas cadenas distintas hay algún punto en que ellas se diferencian; entonces la mínima diferencia que pueden tener es que difieran en un arco, pero si saco ese arco no desconecta el grafo, lo cual niega la hipótesis. **¡Absurdo!**

Finalmente de 1. y 2. podemos asegurar que si es verdadero que "*G es conexo y si se saca un arco deja de serlo*" no puede ser falso que "*todo par de vértices está unido por una y sólo una cadena*".

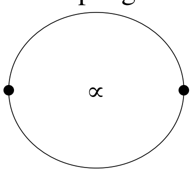
c.q.d. $\square$

f) *Si* $(6) \Rightarrow (1)$

Para demostrar esta equivalencia también la separamos en dos partes, una parte la demostramos también por el absurdo.

1^a **parte:** Si por hipótesis todo par de vértices está unido por una cadena, entonces G es conexo.

2^a **parte:** Supongamos que la hipótesis es cierta y que no es cierto que el grafo es sin ciclos.



Si el grafo tiene ciclos, entonces existe al menos un ciclo μ. Dicho ciclo puede descomponerse en dos cadenas, y por lo tanto existe un par de vértices (los extremos de las dos cadenas) que están unidos por dos cadenas distintas, lo cual niega que para todo par de vértices existe sólo una cadena. **¡Absurdo!**

Finalmente de 1. y 2. podemos asegurar que si es verdadero que "*todo par de vértices está unido por una y sólo una cadena*" no puede ser falso que "*G es conexo y sin ciclos*".

c.q.d. □

Así, al demostrar todas estas implicaciones, logramos demostrar las equivalencias entre cada par de propiedades.

Si un grafo es conexo pero tiene ciclos, se puede obtener un grafo parcial de él que sea un árbol. Esto nos permite caracterizar la conexidad de otra manera.

Definición: Un grafo (digrafo) es *conexo* si y sólo si admite un grafo (digrafo) parcial que sea árbol. ◇

Este tipo de grafo parcial recibe un nombre especial:

Definición: Sea G un grafo (digrafo) conexo, cualquier grafo (digrafo) parcial de él que sea árbol se denomina *árbol cubriente* o *árbol subtenso* de G. ◇

Definición: Sea $H = \langle X, U_H, \gamma_H \rangle$, un árbol subtenso de $G = \langle X, U, \gamma \rangle$, el grafo (digrafo) parcial formado por $\langle X, U - U_H, \gamma_{|U-U_H} \rangle$ se denomina *co-árbol* de H de G. ◇

Si un grafo G es conexo siempre admitirá al menos un árbol subtenso. Además, salvo que G ya sea un árbol, G podrá tener más de un árbol subtenso posible.

Si un grafo no es conexo, claramente no podrá tener un árbol subtenso (porque él es un grafo parcial conexo y sin ciclos).

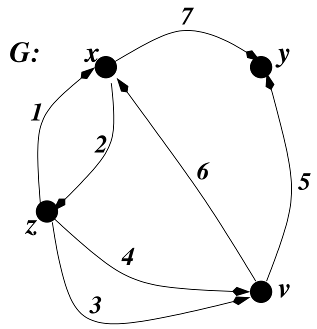
Si un grafo tiene m arcos y un árbol subtenso necesita usar $n - 1$ arcos, podemos comprobar que no pueden existir más de $\begin{pmatrix} m \\ n-1 \end{pmatrix}$ árboles subtensos posibles, ya que no se puede elegir cualquier subconjunto de $n - 1$ arcos y obtener siempre un árbol (¿Por qué?).

Es interesante observar cómo se relacionan estos grafos parciales con los espacios de ciclos y cociclos de G. Si H es un árbol subtenso de G y si G era conexo (en otro caso G no podría tener un árbol subtenso), y suponiendo además que $|X| = n$, tendremos que $|U_H| = n-1 = \lambda(G)$, o sea que la cantidad de arcos en el árbol subtenso coincide con la cantidad de vectores de cociclos elementales linealmente independientes que puede tener G. Además el co-árbol de H tendrá $m - n + 1$ arcos [7], lo cual coincide con la cantidad de vectores de ciclos elementales linealmente independientes del grafo conexo G (o sea, con $\mu(G)$).

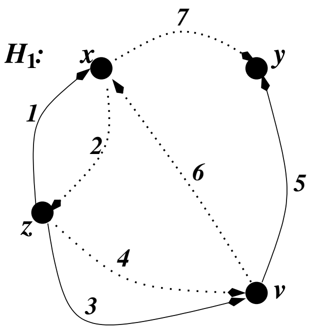
Dado que se puede obtener para un grafo G conexo más de un árbol (co-árbol), se evidencia que pueden existir distintas bases del espacio de cociclos (ciclos), pero todas tendrán el mismo número de vectores.

Ejemplo: sea G el siguiente grafo:

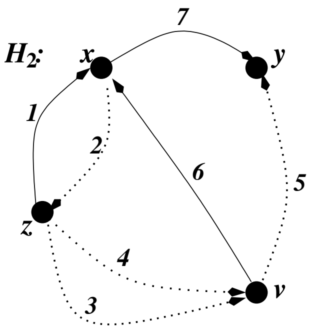
[7] $|U| - |U_H| = m - (n-1) = m - n + 1$.



Claramente G es conexo pero tiene ciclos. Podemos obtener más de un árbol subtenso para G. Los siguientes grafos muestran distintos árboles subtensos posibles y cúales serían los coárboles en cada caso. Indicamos sobre el mismo grafo los correspondientes grafos parciales, indicando con trazo lleno los arcos del árbol y con línea punteada los arcos del co-árbol.



En este caso los 4 vectores de la base de ciclos tendrán un valor distinto de 0 en una y sólo una de las posiciones correspondientes a los arcos 2, 4, 6 y 7. A su vez en los 3 vectores de la base de cociclos tendrán un valor distinto de 0 en una y sólo una de las posiciones correspondientes a los arcos 1, 3 y 5.



En este caso los 4 vectores de la base de ciclos tendrán un valor distinto de 0 en una y sólo una de las posiciones correspondientes a los arcos 2, 3, 4 y 6. A su vez en los 3 vectores de la base de cociclos tendrán un valor distinto de 0 en una y sólo una de las posiciones correspondientes a los arcos 1, 6 y 7. En este caso podrán obtenerse menos de 35 árboles subtensos.

Queda como ejercicio que descubran cuántos árboles subtensos admite este grafo. $\square$

El hecho de que la cantidad de arcos del co-árbol coincida con el número de vectores en la base del espacio de ciclos es debido a que cada arco del co-árbol cierra un ciclo y si tomamos dicho arco para crear un único ciclo elemental aseguraremos la independencia de los vectores obtenidos. Algo similar es lo que ocurre en el caso de los cociclos, si cada arco del árbol se usa en un único cociclo elemental, entonces se consigue que los vectores de los cociclos sean linealmente independientes.

Pasaremos ahora a analizar un concepto relacionado con el de árbol, pero que se aplica sólo a digrafos, y para ello necesitamos una nueva característica posible de un grafo.

Definición: Un digrafo G es *cuasi-fuertemente conexo* (CFC) si y sólo si para todo par de vértices siempre existe otro vértice que llega a cada uno de ellos mediante un camino, en símbolos:

$$CFC(G) \equiv (\forall x, y \in X)(\exists z \in X) \text{ tal que existe camino de } z \text{ a } x \text{ y existe camino de } z \text{ a } y. \ \diamond$$

De esta definición se puede inferir que si un digrafo es cuasi-fuertemente conexo será conexo, y que si es fuertemente conexo será cuasi-fuertemente conexo.

Otra deducción que se puede realizar a partir de la definición es que si un grafo es cuasi-fuertemente conexo entonces tendrá una raíz.

Se deja como ejercicio probar que si G es cuasi-fuertemente conexo entonces G tiene una raíz.

Daremos ahora la manera de caracterizar otro tipo de digrafo denominado *arborescencia*.

Teorema: Sea $G = \langle X, U, \gamma \rangle$ un digrafo de orden n (con $n > 1$). Las siguientes propiedades son equivalentes y cada una caracteriza una *arborescencia*:

(1) *G es cuasi-fuertemente conexo y sin ciclos.*

(2) *G es cuasi-fuertemente conexo y tiene $n - 1$ arcos.*

(3) *G es un árbol con una raíz a.*

(4) *Existe un vértice a unido a todo vértice con un camino único.*

(5) *G es cuasi-fuertemente conexo, y si un arco es sacado se pierde esta propiedad.*

(6) *G es cuasi-fuertemente conectado y* $(\exists a)(g^-(a) = 0) \wedge (\forall x \neq a)(g^-(x) = 1)$.

(7) *G es sin ciclos y* $(\exists a)(g^-(a) = 0) \wedge (\forall x \neq a)(g^-(x) = 1)$.

$\diamond$

Como ya sabemos, si quisiéramos demostrar la equivalencia entre estas propiedades lo más sencillo es mostrar las implicaciones:

Si $(1) \Rightarrow (2)$, *Si* $(2) \Rightarrow (3)$, *Si* $(3) \Rightarrow (4)$, *Si* $(4) \Rightarrow (5)$, *Si* $(5) \Rightarrow (6)$, *Si* $(6) \Rightarrow (7)$, *Si* $(7) \Rightarrow (1)$.

Claramente todas estas caracterizaciones muestran en alguna parte que son aplicables sólo a digrafos.

En este caso las demostraciones quedarán como ejercicio. Algunas de ellas son muy simples (basta sólo con ir aplicando definiciones e hipótesis) y otras son más complejas (algunas se lograrán demostrar por el método del absurdo).

Reconocimientos

El presente apunte se realizó tomando como base apuntes de clases del *Ing. Hugo Ryckeboer*, en la Universidad Nacional de San Luis, y los libros **Graphs** de *Claude Berge* [8] y **Graph Theory and its Applications** de *Jonathan Gross* y *Jay Yellen* [9].

[8]Graphs, de C. Berge, 3^a Ed. 1991, North Holland Mathematical Library, ISBN: 0-4448-7603-0.

[9]Graph Theory and its Applications, de J. Gross y J. Yellen, 2^{da} Impresión 1999, CRC Press, ISBN: 0-8493-3982-0.